平成28年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「数学」

以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問1 Bernoulli数 B_k は，母関数を用いて以下のように定義される．

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{t^k}{k!}$$

3つのBernoulli数 B_0, B_1 および B_2 を求めよ．

問2 次の 2×2 の行列

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & -\alpha\end{pmatrix}$$

に対し，$\exp\hat{A}$ を次式で定義する．

$$\exp\hat{A}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\hat{A}^n$$

ただし，α,β は正の実数とする．

2-1) $\exp\hat{A}$ が以下のように書き表せることを示し，$f(\alpha,\beta)$ と $g(\alpha,\beta)$ を求めよ．

$$\exp\hat{A}=f(\alpha,\beta)\hat{1}+g(\alpha,\beta)\hat{A}$$

ただし，

$$\hat{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

である．ヒント: $\hat{A}$ の偶数べき乗項と奇数べき乗項とを別々に考えるとよい．

2-2) $\exp\hat{A}$ の行列式を計算せよ．

問3 2次元のLaplace演算子 $\Delta=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ を含む以下の方程式の固有値 λ と固有関数 $u(x,y)$ を全て求めよ．

$$\Delta u=\lambda u$$

ただし，λ と $u(x,y)$ は実数である．また，この方程式は $x\in[0,a]$ と $y\in[0,b]$ $(a,b>0)$ の長方形の内部の領域で定義され，境界では $u=0$ を満たすものとする．ヒント: $u(x,y)=X(x)Y(y)$ と変数分離できる．

平成 28 年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 I」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．重力加速度の大きさをgとする．

問 1　バネ定数k，自然長ℓ_0の 2 本の軽いバネを考える．

1-1)　この 2 本のバネを，図 1-1 のように連結して自然長$2\ell_0$のバネをつくった．このバネを長さ方向に伸縮する場合のバネ定数を求めよ．(理由も必ず示すこと．)

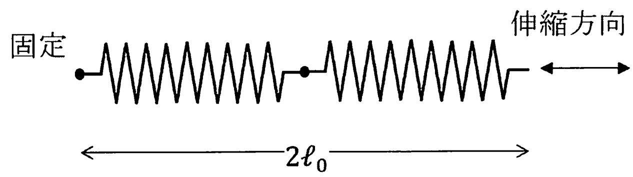

図 1-1

1-2)　次に図 1-2 のように，この連結したバネを水平にして両端を固定し，さらに中央の連結点に質量mの小物体をぶらさげた．固定した 2 点間の距離は$2\ell_0$である．また連結点でバネは図のように自由に屈曲でき，小物体は，常にふたつの固定点の中間点 O をとおる鉛直線上にある場合を考える．点 O から鉛直下方の小物体までの距離をxとする．$x \ll \ell_0$のとき，バネの弾性エネルギーと重力の位置エネルギーの和が$U = kx^4/(4\ell_0{}^2) - mgx$となることを示せ．ただし，中間点 O をエネルギーの基準とする．

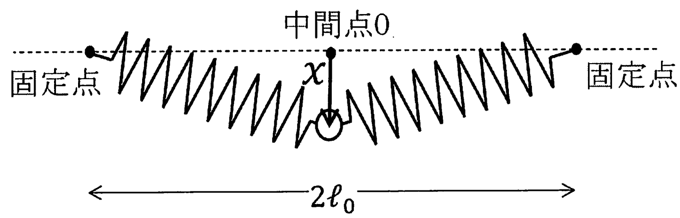

図 1-2

1-3)　小物体が平衡点(力のつり合い点)で静止しているときのxをx_0とする．x_0を求めよ．$x_0 \ll \ell_0$として良い．

1-4)　この平衡点近傍において，鉛直方向の小物体の微小振動の角振動数をm, k, ℓ_0を用いて表せ．

問 2　図 1-3 のような緩やかに変化する斜面を考える．水平方向の距離をx，斜面の高さを$h(x)$とする．この斜面にそって質量mの小物体が充分にゆっくりと滑り降りた．小物体と斜面の間の動摩擦係数をμ'とする．

2-1) 斜面の途中で，小物体が斜面に沿ってわずかに，水平方向の距離でΔxだけ移動した．この間に摩擦力がした仕事の大きさを求めよ．

2-2) 小物体が斜面に沿って，$x = 0$から$x = x_0$まで移動し，hがh_0だけ変化した．このとき，摩擦力がした全仕事の大きさを求めよ．

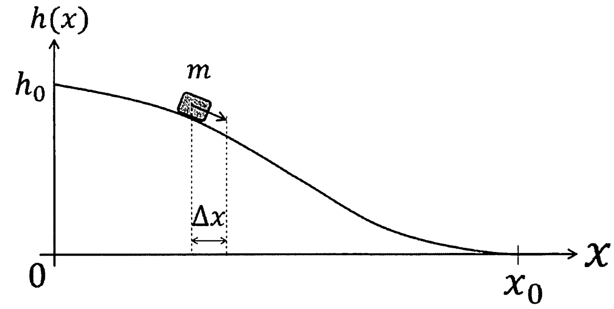

図 1-3

問 3 図 1-4 のように半径R，回転軸まわりの慣性モーメントIの滑車に，伸縮しない軽いワイヤーがかけられている．ワイヤーの一端には質量mの小物体がぶら下がり，ワイヤーの他端はバネ定数kの軽いバネを通して地上に固定されている．バネの自然長からの伸びをx，滑車の反時計方向の回転角をθ，小物体側のワイヤーの張力をTとする．ワイヤーと滑車は滑ることなく一緒に運動する． また，小物体は鉛直上下方向にのみ運動する．

3-1) 小物体の運動方程式および滑車の回転の運動方程式を書け．

3-2) xがΔxだけ変化したときの回転角の変化$\Delta\theta$を求めよ．

3-3) 小物体が平衡点の近傍で鉛直方向に単振動を行った．このときの角振動数を求めよ．

3-4) 滑車は，回転軸の中心から距離aまでは密度ρ_1，aからRまではρ_2の材料でできている．厚さをDとして，滑車の回転軸まわりの慣性モーメントIを求めよ．

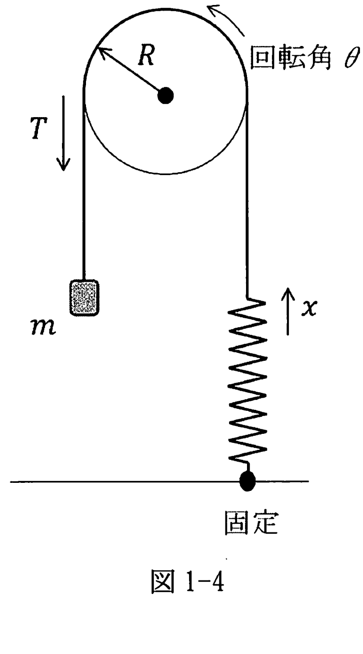

図 1-4

平成28年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学I」

[2] 以下の問いに答えよ．ただし，真空の誘電率を ϵ_0，真空の透磁率を μ_0 とする．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問1 図2-1で示すように，間隔 d，半径 R の円板型の極板をもつ平行板コンデンサーが真空中にある．コンデンサーの右側の極板の中心を座標原点とし，極板に垂直な方向に z 軸をとる．コンデンサーの両端から z 軸上へ長く細いまっすぐな導線がつながり，I_0 を定数，t を時間，ω を角周波数として，$I_0 \sin \omega t$ で表される交流電流が導線上を流れている．電流の向きは，z の正方向を正とする．コンデンサー内部の電場 $\boldsymbol{E}$ は空間的に一様であり，外部への電場の漏れは無いものとする．また，この系に生じる磁束密度の時間変化に伴う誘導起電力は無いものとする．

1-1) コンデンサーから充分離れた外部の点 $\mathrm{P}(x, 0, z)$ (ただし $z > 0$) における磁束密度ベクトルを t の関数として求めよ．

1-2) コンデンサー内部の点 $\mathrm{Q}(x, 0, -\frac{d}{2})$ (ただし $-R < x < R$) には，電場 $\boldsymbol{E}$ の時間変化による変位電流が流れる．点Qにおける変位電流密度ベクトル $\epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ を t の関数として求めよ．

1-3) 点Qにおける磁束密度ベクトルを t の関数として求めよ．

1-4) $z = -d$ の極板を基準として，$z = 0$ の極板の電位の交流成分を t の関数として求めよ．

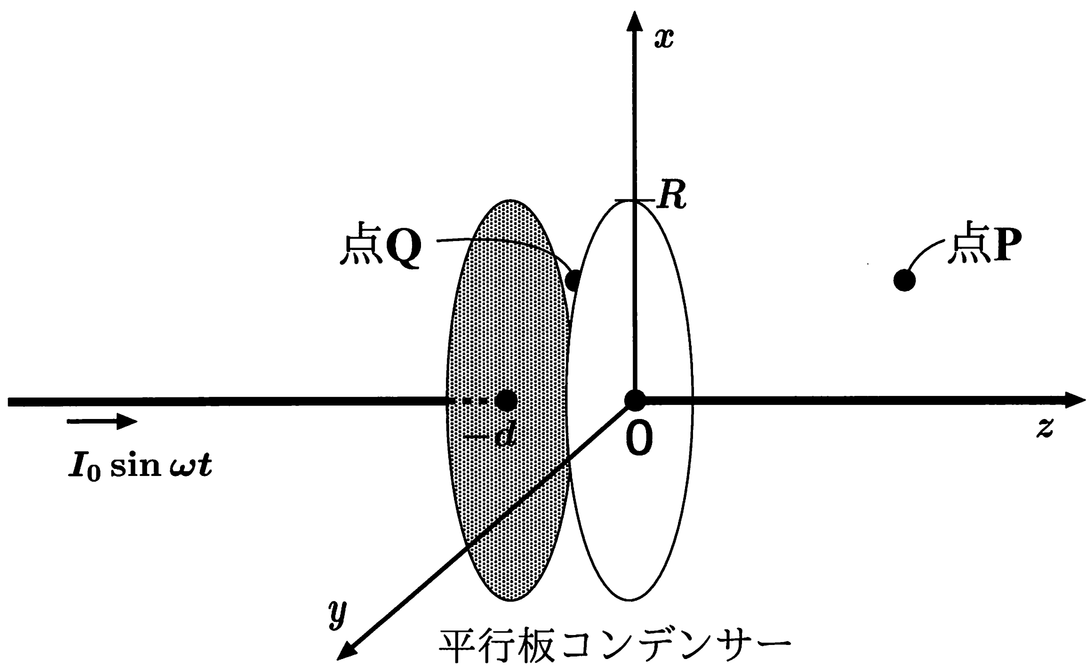

図2-1

問 2　図 2-2 のように，長さ 2ℓ のまっすぐな細い棒が真空中にあり，座標原点を中心として x 軸上に置かれている．棒に一様な線密度 λ で電荷を帯電させた．必要であれば，以下の積分公式を用いてよい．

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right| + C \qquad (\alpha \text{ は実定数}, C \text{ は積分定数})$$

2-1)　y 軸上の点 $(0, y, 0)$ (ただし $y > 0$) における電場について考える．y が ℓ より充分小さく，棒が無限に長いとみなせる場合と，y が ℓ より充分大きく，棒が電荷 $2\lambda\ell$ を持つ点電荷とみなせる場合のそれぞれについて，電場の y 成分を求めよ．

2-2)　無限遠の電位をゼロとして，点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ が，

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\log\left(\frac{x+\ell+\sqrt{(x+\ell)^2+y^2+z^2}}{x-\ell+\sqrt{(x-\ell)^2+y^2+z^2}}\right)$$

または，

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\log\left(\frac{x-\ell-\sqrt{(x-\ell)^2+y^2+z^2}}{x+\ell-\sqrt{(x+\ell)^2+y^2+z^2}}\right)$$

で表されることを示せ．(どちらか一方を示せば良い．)

次に，図 2-3 のように，表面の形状が x 軸を回転軸とした回転楕円体 (短径 b，焦点 $(-\ell, 0, 0)$ および $(\ell, 0, 0)$) で表される導体の塊が真空中にあり，導体に総電荷 Q を帯電させた．

2-3)　導体内部における電場がゼロである理由を，3 行程度で説明せよ．

2-4)　導体外部の点 $(0, y, 0)$ (ただし $y > b$) における電場の y 成分 $E_y(0, y, 0)$ を求めよ．
ヒント：2-2) の $\phi(\boldsymbol{r})$ をさらに変形すると，

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\log\left(\frac{\sqrt{(x+\ell)^2+y^2+z^2}+\sqrt{(x-\ell)^2+y^2+z^2}+2\ell}{\sqrt{(x+\ell)^2+y^2+z^2}+\sqrt{(x-\ell)^2+y^2+z^2}-2\ell}\right)$$

となり，その等電位面は，

$$\sqrt{(x+\ell)^2+y^2+z^2}+\sqrt{(x-\ell)^2+y^2+z^2} = (\text{一定})$$

の回転楕円体 (点 $(-\ell, 0, 0)$ と点 $(\ell, 0, 0)$ を焦点とする回転楕円体) になることに着目せよ．

2-5)　回転楕円体表面上の点 $(0, b, 0)$ における電荷の面密度を求めよ．

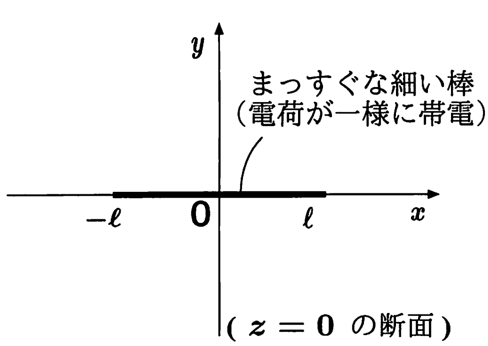

図 2-2

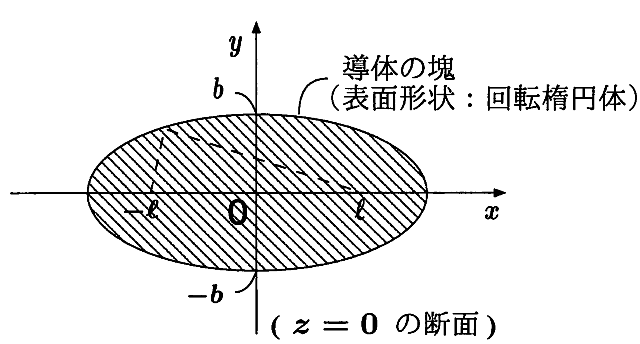

図 2-3