平成28年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学II」

[1] 以下の問いに答えよ．ただし，プランク定数を h，$\hbar = h/(2\pi)$，$i = \sqrt{-1}$ とする．解答は，結果だけではなく求め方の説明や計算の過程も示すこと．

問1　次のポテンシャルが存在する1次元空間において，x が負の側から質量 m，エネルギー E の粒子を入射した．ただし $E > V_0 > 0$ とする．

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ V_0 & (x \geq 0) \end{cases}$$

1-1)　この粒子の $x < 0$ の領域における波動関数を

$$\psi(x) = Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_2 x}$$

と書くとき，k_1 を求めよ．ただし A, B, k_1, k_2 は実定数とし，$k_1, k_2 > 0$ とする．

1-2)　この粒子の $x > 0$ における波動関数を

$$\psi(x) = Ce^{iq_1 x} + De^{-iq_2 x}$$

と書くとき，q_1 を求めよ．ただし C, D, q_1, q_2 は実定数とし，$q_1, q_2 > 0$ とする．

1-3)　B, C, D のそれぞれを A, k_1, q_1 を使って書き表せ．

1-4)　一般に，波動関数 $\phi(x)$ で表される質量 m の粒子の確率流密度 $j(x)$ は次の式で定義される．

$$j(x) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\phi^* \frac{d}{dx}\phi - \phi\frac{d}{dx}\phi^*\right)$$

上述の系の $x < 0$ の領域において，x の正の方向に進む粒子の確率流密度を j_{in}，x の負の方向に進む粒子の確率流密度を j_{out} とすると，正の方向に進んでいた粒子がポテンシャル壁で跳ね返される反射率 R は次の式で定義される．

$$R = \frac{|j_{\mathrm{out}}|}{|j_{\mathrm{in}}|}$$

反射率 R を E, V_0 を用いて表せ．

問2　xy 面内に閉じ込められた質量 m，電荷 $q(q > 0)$ の荷電粒子1個に対し，z 軸方向に磁束密度の大きさ B の磁場，x 軸方向に大きさ E の電場がかけられているとする．このとき xy 面内における粒子のハミルトニアンは

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{(p_y - qBx)^2}{2m} - qEx$$

と書ける．ここで $(p_x, p_y) = \frac{\hbar}{i}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ は粒子の運動量演算子である．

2-1)　粒子の波動関数 Ψ を，実数 k を用いて

$$\Psi = e^{iky}\phi_k(x)$$

と置く．この波動関数 Ψ を時間に依存しないシュレディンガー方程式 $H\Psi = \epsilon_k\Psi$ に代入すると，$H'_k\phi_k(x) = \epsilon_k\phi_k(x)$ という方程式が得られる．ここで ϵ_k は状態 Ψ の固有エネルギーである．この H'_k を書け．

2-2) H'_k は，調和振動子のハミルトニアンと同じ形になる．対応する調和振動子の角振動数を求めよ．

2-3) 与えられた k に対するこの粒子の最低エネルギー固有値を求めよ．

次に，上記と同様の状況において，粒子の質量（有効質量）が x，y 方向で異なり，ハミルトニアンが次式で書ける場合を考える．

$$H = \frac{p_x^2}{2m_1} + \frac{(p_y - qBx)^2}{2m_2} - qEx$$

ここで m_1, m_2 は，それぞれ，粒子の x 方向，y 方向の有効質量である．

2-4) 2-1) および 2-2) と同様の方法を用いると，この粒子も調和振動子と同じ形のハミルトニアンで記述されることがわかる．対応する調和振動子の角振動数を求めよ．

平成28年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学II」

[2] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．プランク定数を h, $\hbar = h/(2\pi)$，温度を T，ボルツマン定数を k_{B} として逆温度 $\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ とする．また，物理量 A の統計力学的な平均値を $\langle A \rangle$ と表す．以下の問題では系は温度 T の熱浴と熱平衡状態にあるものとする．

問1　格子間隔 a でリング状に原子が並んだ一次元格子の格子振動を考える．原子の個数を N とし (N は奇数とする)，リングの長さを $L = Na$ と表す．量子力学的には，この系の格子振動は調和振動子の集まりとして記述できる．それらの調和振動子のエネルギー固有値は，波数 $q = \frac{2\pi j}{L}$, $[j = 0, \pm 1, \cdots, \pm (N-1)/2]$ を用いると，整数 n_q を用いて

$$E = \sum_q \hbar\omega_q \left(n_q + \frac{1}{2} \right), \quad (n_q = 0, 1, 2, \cdots), \tag{1}$$

と表せる．ここで，$\hbar\omega_q$ は波数 q の格子振動のエネルギーである．零点エネルギーを無視して以下の設問に答えよ．

1-1)　系の自由エネルギー F が自然対数 $\log$ を用いて以下のように書けることを示せ．

$$F = k_{\mathrm{B}}T \sum_q \log \left(1 - e^{-\beta\hbar\omega_q} \right). \tag{2}$$

1-2)　単位長さあたりのエネルギーの平均値 $\epsilon \equiv \langle E \rangle / L$ がボーズ分布関数 $n_{\mathrm{B}}(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ を用いて

$$\epsilon = \frac{1}{L} \sum_q \hbar\omega_q n_{\mathrm{B}}(\beta\hbar\omega_q), \tag{3}$$

となることを示せ．

1-3)　a を一定にしつつ $L \to \infty$ の極限をとり，1-2) で求めた式 (3) の中の和を積分に直せ．

1-4)　$v_0 > 0$ として $\omega_q = v_0|q|$ と近似できるものとする．極低温 ($k_{\mathrm{B}}T \ll \pi\hbar v_0/a$) での単位長さあたりの比熱 c が T^α に比例することを示せ．また，α を求めよ．

1-5)　1-4) で求めた比熱の温度依存性を次のキーワードを全て用いて定性的に説明せよ．なお，一つのキーワードを複数回用いても良い．
キーワード：「状態密度」,「温度」,「ボーズ分布」.

問2　3個の等価なスピン (大きさ $S = \frac{1}{2}$) が反強磁性的に相互作用している系を考える．ハミルトニアンは以下で与えられる．

$$H = \frac{4\Delta}{3} (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_1), \quad (\Delta > 0). \tag{4}$$

H の固有値は $\pm\Delta$ の二つのみをとり，それぞれは4重に縮退している．各状態は全スピンの z 成分 $S^z_{\mathrm{tot}} = S^z_1 + S^z_2 + S^z_3$ の固有状態にとることができ，その固有値 m は表1のようになる．このような3つのスピンからなる系の熱平衡状態について以下の問いに答えよ．

2-1)　上記の系の分配関数 Z を求めよ．

2-2)　S^z_{tot} の二乗の平均値 $\langle [S^z_{\mathrm{tot}}]^2 \rangle$ を求めよ．

エネルギー固有値	S^z_{tot} の固有値 m
Δ	$\left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$
$-\Delta$	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

表 1: 固有状態のリスト.

2-3) エネルギーの平均値 $\langle H \rangle$ を求めよ.

2-4) この系の比熱が平均値 $D(T) \equiv \langle \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \rangle$ の温度微分 $dD(T)/dT$ に比例していることを示せ.

2-5) この系に一様な z 方向の磁場をかけると，ゼーマンエネルギー

$$H_{\mathrm{Zeeman}} = -h_z S^z_{\mathrm{tot}}, \tag{5}$$

が生じる．ここで h_z は磁場に比例する量であり，エネルギーの次元をもつ．$k_{\mathrm{B}}T \ll \Delta$ の低温においてエネルギー固有値 $+\Delta$ の状態を無視する近似を用いて，$\langle S^z_{\mathrm{tot}} \rangle$ を h_z の一次まで求め，帯磁率 $\chi = \lim_{h_z \to 0} \langle S^z_{\mathrm{tot}} \rangle / h_z$ を計算せよ．また，求めた $k_{\mathrm{B}}T \ll \Delta$ での帯磁率の大きさを，$\Delta = 0$ のときの自由な 3 つのスピンの帯磁率 $\chi_0 = 3/(4k_{\mathrm{B}}T)$ と比べ，その大小の理由を 2-2) の結果と関連付けて説明せよ．