平成29年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「数学」

以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問1　ルジャンドル多項式 $P_n(x)$ は次の母関数によって定義される．

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$$

1-1)　初めの3つのルジャンドル多項式 $P_0(x)$，$P_1(x)$，および $P_2(x)$ を求めよ．

1-2)　次の定積分を計算せよ．

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_1(x) P_2(x)$$

問2　次の 2×2 の行列を考える．

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ここで $a,\ b,\ c,\ d$ は実数であり，行列式 $g \equiv \det \hat{g}$ は $g < 0$ で，トレース $t \equiv a + d$ は 0 ではないとする．

2-1)　この行列 $\hat{g}$ の二つの実数固有値 λ_1 および λ_2 を，g および t の関数として求めなさい．但し，$\lambda_1 < \lambda_2$ とすること．

2-2)　$g\ (< 0)$ を固定したとき，次の極限値を求めなさい．

$$\lim_{t \to \infty} (t\lambda_1)$$

2-3)　$t\ (\neq 0)$ を固定したとき，次の極限値を求めなさい．

$$\lim_{g \to -\infty} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)$$

問3　次の定積分を計算せよ．

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

問4　次の微分方程式の解 $y = y(x)$ を求めなさい．

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = e^{y/x} + \frac{y}{x}\ , \qquad 0 < x \le 1\ ,$$

但し，$y(1) = 0$ とすること．

平成29年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 I」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．円周率は π とする．

問1　図1-1のような穴の開いた，外半径 a，内半径 $a/2$ の質量 M の一様な密度の円板が，中心を通る軸のまわりに角速度 ω_0 で回転している．ブレーキAとBは，円板に触れていないものとする．

1-1)　円板の中心を通る軸まわりの慣性モーメントを求めなさい．答えは a，M を用いて表しなさい．
以下，この慣性モーメントを I とする．

1-2)　円板の外周にブレーキAを接触させると，速度に比例する抵抗力 (比例係数 k) が円板の外周の接線方向にはたらき始めた．抵抗力がはたらいてから時間 t 経過すると，円板の角速度は ω となった．このときの回転軸まわりの抵抗力のモーメントの大きさを求めなさい．答えは a，k，ω を用いて表しなさい．

1-3)　1-2) の ω を a，k，I，t，ω_0 を用いて表しなさい．

1-4)　1-2) の抵抗力がはたらき始めてから円板は徐々に減速し，θ 回転したあとに静止した（θ は整数に限定しない）．このときの θ を求めなさい．答えは a，k，I，ω_0 を用いて表しなさい．

1-5)　ブレーキAを外し，再び円板を角速度 ω_0 で回転させた．ブレーキAと同様の速度に比例する抵抗力 (1-2) と同じ比例係数 k) がはたらくブレーキBを円板の内周に接触させたとき，円板が止まるまでに何回転するか求めなさい．答えは 1-4) の θ を用いて表しなさい．

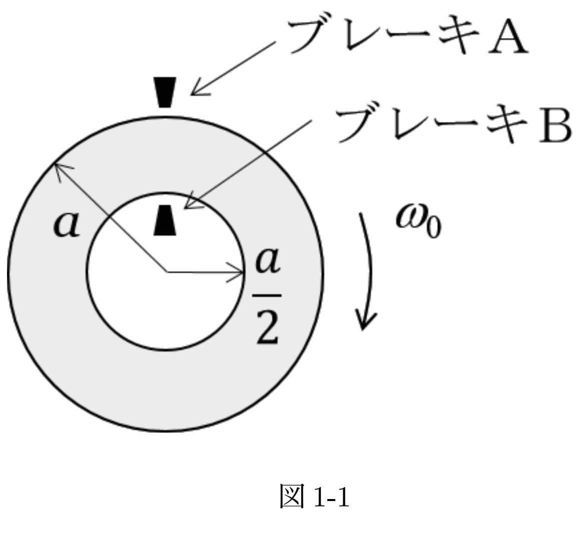

図1-1

問 2　底面の半径 a，高さ $2a$ の円すい形の容器がある．この容器を、図 1-2 のように逆さにし，中心軸が鉛直になるように立てた．円すいの頂点を原点 O とし，中心軸にそって鉛直上方向に z 軸をとる．上部円周上の点 P に質量 m の質点を置き，水平方向に初速度 v_0 を与え，円すい内部の斜面に沿って運動させる場合を考える．重力加速度の大きさを g とし，容器の内面と質点の間の摩擦は無視してよい．

2-1)　質点が原点 O からの高さ h の位置にいるときの z 軸まわりの角速度を求めなさい．
以下，この角速度を ω とする．

2-2)　2-1) のとき，質点は斜面から垂直に抗力 $\boldsymbol{R}$ を受ける．この抗力の水平成分が中心力となり，水平面内では円運動をしているとみなせる．水平面内での中心方向に関する質点の運動方程式をたてなさい．答えは h，m，ω，R を用いて表しなさい．

2-3)　2-1) のとき，質点が面から受ける抗力 $\boldsymbol{R}$ の大きさを求めなさい．答えは m，ω，h を用いて表しなさい．

2-4)　質点の z 方向の加速度が 0 となるときの，質点の高さを求めなさい．答えは a，g，v_0 を用いて表しなさい．

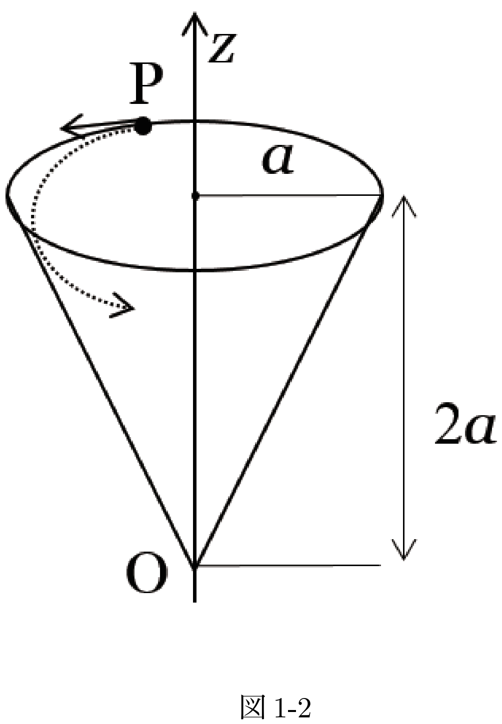

図 1-2

平成29年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 I」

[2] 以下の問いに答えよ．ただし，真空の誘電率を ϵ_0，真空の透磁率を μ_0，円周率は π とする．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問１　図2-1のように，xy 平面上に内半径が R_1 で外半径が R_2 の円板が原点を中心にして存在する．この円板に面密度 $\sigma(>0)$ で正の電荷が一様に分布している．

1-1)　z 軸上の点 $(0,0,a)$ における電場 (ベクトル) を求めよ．

1-2)　無限遠での電位をゼロとした場合の原点における電位を求めよ．

次に，z 軸上の点 $(0,0,a)$ において，負の電荷 $-q$ $(q>0)$ を持つ質量 m の小球を静かにはなした．ここで重力の影響は無視する．また，運動による電磁波の放出も無視する．

1-3)　$|a| >> R_2$ の場合，小球にはたらく力の大きさは原点からの距離の何乗に反比例するか求めよ．

1-4)　$|a| << R_1$ の場合，小球は原点を中心にして単振動した．この単振動の周期を求めよ．

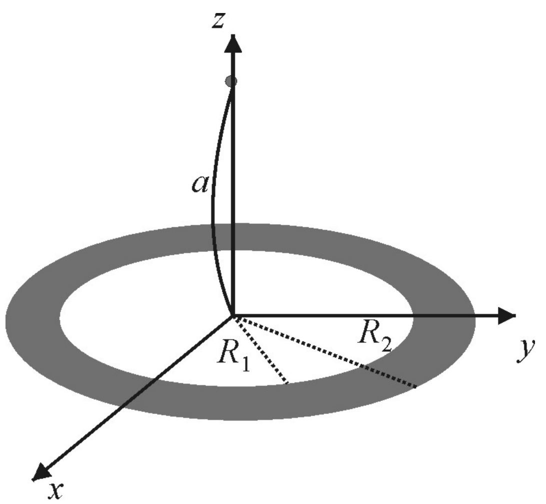

図2-1

問 2　図 2-2 のように yz 平面上に断面積 S の一巻きコイルが原点を中心にして存在する．コイルの抵抗を R，コイルの自己インダクタンスを L とする．このコイルには静電容量 C を持つコンデンサが接続されている．コイルを除く導線の抵抗とインダクタンスは無視できる．ここで，時間に対し角振動数 ω で周期的に変動し，x 軸に平行かつ一様な磁場を外部から印加した．時刻 t におけるその磁束密度を $(B_0\cos(\omega t),\ 0,\ 0)$ とする．ここで，$\omega > 0$ とし，図に示した向きに電流が流れる場合の誘導起電力および電流の向きを正とする．

2-1)　時刻 t において，外部から印加した磁場によりコイルに発生する誘導起電力を求めよ．

2-2)　電流を時刻 t の関数 $I(t)$ としたとき，$I(t)$ に対する微分方程式 (回路方程式) が

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}\,t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}\,I = \frac{SB_0\,\omega^2}{L}\cos(\omega t)$$

と書けることを示せ．

2-3)　磁場をかけてから充分に時間が経過した定常状態において，回路を流れる電流は定数 A および δ を用いて，$I(t) = A\cos(\omega t + \delta)$ で与えられる．2-2) の微分方程式を解いて，A および $\tan\delta$ を求めよ．

2-4)　コイルの面を貫く正味の磁束は，外部から印加した磁場と，コイルを流れる電流により生じる磁場の二つの寄与からなる．ここで抵抗 R の大きさをゼロとした場合，外部より印加した磁場による磁束に対し，正味の磁束の符号が逆になる角振動数 ω の範囲を求めよ．

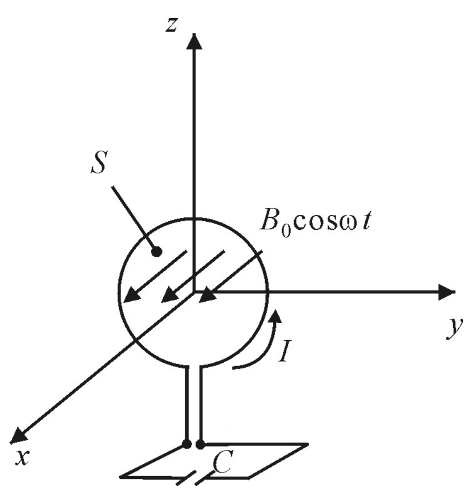

図 2-2