平成29年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学II」

$[\,1\,]$ 以下の問いに答えよ．ただし，プランク定数を h, 円周率を π，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ とする．解答は，結果だけでなく求め方や計算の過程も示すこと．

問1　1次元空間で図1-1のようなポテンシャル $V(x)$ を考える．

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (\ |x| > d/2\ ) \\ -V_0 & (\ |x| \leq d/2\ ) \end{cases}$$

ここで，$V_0 > 0$，$d > 0$ である．この中を運動する質量 m の粒子の固有エネルギーを E，エネルギー固有関数を $\psi(x)$ とする．$-V_0 < E < 0$ の束縛状態について，以下の問いに答えよ．

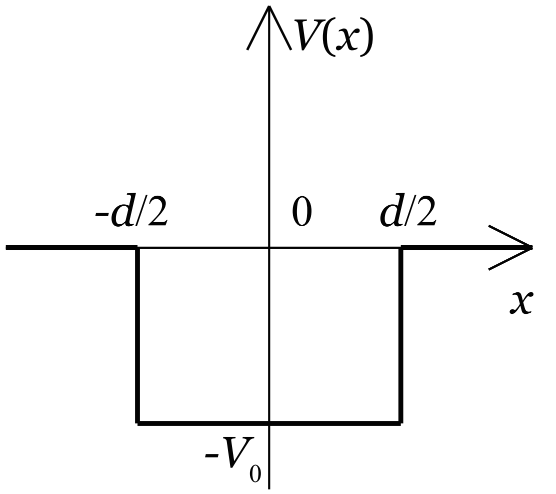

図1-1

1-1)　基底状態を含む固有関数は，2つの実定数 $k_1\ (>0)$, $k_2\ (>0)$ を用いて，次の形に書くことができる．

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{k_2 x} & (\ x < -d/2\ ) \\ B\cos k_1 x & (\ -d/2 \leq x \leq d/2\ ) \\ Ae^{-k_2 x} & (\ x > d/2\ ) \end{cases}$$

ここで，A, B は規格化定数である．このとき，k_1 と k_2 は次の関係を満たすことを示せ．

$$k_1^2 + k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}V_0$$

1-2)　$x = \pm d/2$ において，波動関数およびその導関数が連続であることから，k_1 と k_2 の満たすべきもう一つの関係式が次のようになることを示せ．

$$k_2 = k_1 \tan\left(\frac{k_1 d}{2}\right)$$

1-3)　$V_0\, d = v$ として，v を一定に保ったまま d を小さくすることを考える．このとき，どんなに小さな d に対しても，束縛状態の解が一つ存在することを説明せよ．また，d が充分小さいときの束縛状態の固有エネルギーを $m, v, \hbar$ を用いて表せ．

問 2　スピン $S = 1/2$ の一つの電子が軌道角運動量量子数 $L = 1$ の状態にある．スピン演算子を $\boldsymbol{S}$，軌道角運動量演算子を $\boldsymbol{L}$ とし，この系に，スピン軌道相互作用

$$H_{\mathrm{so}} = \lambda \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$$

がはたらくとする．λ はスピン軌道結合定数である．

2-1) $\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{L}$ の z 成分の固有値をそれぞれ S_z, L_z とし，電子のスピン軌道状態を $|L_z, S_z\rangle$ と表すことにする．この表記に従って，電子の可能な状態を全て書き下せ．

2-2) 全角運動量 $\boldsymbol{J}$ を

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$$

によって定義するとき，H_{so} と $\boldsymbol{J}$ が交換することを示せ．

2-3) $\boldsymbol{J}$ を用いると，H_{so} は次のように書けることを示せ．

$$H_{\mathrm{so}} = \frac{\lambda}{2}\left(\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{L}^2 - \boldsymbol{S}^2\right)$$

2-4) H_{so} の固有エネルギーは 2 つある．それらを λ を用いて表せ．また，それぞれ何重に縮退しているか，縮退度を答えよ．

2-5) $\lambda > 0$ のとき，2-1) の電子のスピン軌道状態の線形結合によって基底状態を表せ．ただし，縮退しているときは全ての状態を表すこと．また，規格化もすること．

ヒント：一般に，角運動量演算子 $\boldsymbol{J}$ の z 成分 J_z の固有状態を $|J_z\rangle$ とし，これに昇降演算子 $J_\pm$ を作用させると，次のようになることを用いてよい．なお，$\boldsymbol{J}$ の角運動量量子数を J とする．

$$J_\pm |J_z\rangle = \sqrt{(J \pm J_z + 1)(J \mp J_z)}\,|J_z \pm 1\rangle$$

平成29年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学II」

[2] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．円周率を π，プランク定数を h，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$，温度を T，ボルツマン定数を k_B とする．

問1　マクスウェルの速度分布則に従う気体分子の運動を考える．この分布則によると，一つの気体分子が $\mathbf{v}$ から $\mathbf{v}+\mathrm{d}\mathbf{v}$ の範囲内の速度を取る確率は，$p(\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{v}$ と書ける．ここで $p(\mathbf{v})$ は

$$p(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_\mathrm{B}T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)$$

であり, m は気体分子の質量，T は気体の温度，$v = |\mathbf{v}|$ である．この p を用いて $\mathbf{v}$ の任意の関数 g の平均値 $\langle g \rangle$ を

$$\langle g \rangle = \int g(\mathbf{v})p(\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{v}$$

で定義するものとする．なお，この積分は $\mathbf{v}$ の全空間にわたって行うものとする．

1-1)　$\langle \mathbf{v} \rangle$ および $\langle v_x^2 \rangle$ を求めよ．ここで v_x は $\mathbf{v}$ の x 成分である．必要であれば以下の積分公式を使ってもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \qquad (a\text{ は正の実定数})$$

1-2)　気体分子一個の運動エネルギーの平均値を求めよ．

1-3)　1-2) の結果に基づいて，エネルギー等分配則が成り立つことを説明せよ．

問2　一辺 L の立方体に閉じ込められた質量 m, 粒子数 N の理想フェルミ気体がある．フェルミ粒子のスピン自由度は考えないものとする．

2-1)　一辺 L の立方体領域における粒子の運動量は，周期的境界条件により

$$p_i = \frac{2\pi\hbar}{L} n_i \qquad (i = x, y, z; \quad n_i\text{は整数})$$

という離散的な値を取る．一つの粒子の運動エネルギーは $\dfrac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}$ で与えられる．このときエネルギー ϵ における状態密度が

$$\rho(\epsilon) = \frac{V(2m)^{3/2}}{4\pi^2\hbar^3}\,\epsilon^{1/2}$$

で与えられることを示せ．ここで $V = L^3$ である．

2-2)　$T = 0$ における全エネルギー E を，フェルミエネルギー ϵ_F の関数として書き表せ．

低温では理想フェルミ気体の定積熱容量は比例定数を γ として, $C = \gamma T$ で与えられる．

2-3)　エントロピー S が $S = \gamma T$ と書けることを示せ．

問 3　独立な N 個の粒子からなる系を考える．各粒子は、二通りのエネルギー値 $-\epsilon_0$ と ϵ_0 $(\epsilon_0 > 0)$ を取ることができる．この系は温度 T の熱浴と接しており，カノニカル分布として扱えるものとする．

3-1)　分配関数 Z とヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ．

3-2)　比熱 C を求めよ．

3-3)　エネルギーの原点を $-\epsilon_0$ に取り，そこからエネルギーを測ることにする．これにより各粒子が取りうる二通りのエネルギー値は 0 と $2\epsilon_0$ になる．温度を無限大にしたときの全系のエネルギーの平均値を求めよ．

3-4)　温度を上げていくと，低いエネルギーを取る粒子の平均の数が徐々に減り，高いエネルギーを取る粒子の平均の数が増えていく．そして温度無限大で両方の数が等しくなる．温度無限大でそれぞれのエネルギー値を取る粒子の数に差がなくなる物理的理由を説明せよ．