平成30年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「数学」

以下の問いに答えよ．ただし，i は $\sqrt{-1}$ である．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問1　式(1)のような積分を考える．ただし，p は正の整数である．

$$\int_0^{\pi} \frac{e^{2ip\phi}}{1+\sin^2\phi}\mathrm{d}\phi \tag{1}$$

1-1)　$\theta = 2\phi$ と変数変換し，この積分を書き直せ．

1-2)　$z = e^{i\theta}$ と変数変換し，この積分を z の複素平面上での周回積分に書き直せ．ただし，z の複素共役 $\bar{z}$ は使わずに z のみを使うこと．また，複素平面上での被積分関数の極の位置を示せ．

1-3)　留数定理を用いて，式(1)の積分の値を求めよ．

問2　次のような4つの 2×2 の行列を考える．

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

2-1)　次の3つの行列を計算せよ．

$$\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1\ , \quad \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\ , \quad (\sigma_1)^2 \tag{3}$$

2-2)　2-1)の結果を用いて，次の無限級数を 2×2 の行列として表せ．ただし，ここで θ は実数である．

$$e^{i\theta\sigma_1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}(\sigma_1)^n \tag{4}$$

2-3)　2-2)の結果を用いて，次の行列を式(2)で示されている行列の1次結合として表せ．

$$A(\theta) = e^{-i\theta\sigma_1}\sigma_2 e^{i\theta\sigma_1} \quad , \quad B(\theta) = e^{-i\theta\sigma_1}\sigma_3 e^{i\theta\sigma_1} \tag{5}$$

2-4)　式(5)で定義された行列 $A(\theta)$ および $B(\theta)$ に対するそれぞれの行列式の値を求めよ．

平成30年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 I」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問1　3次元空間内で座標原点からの距離を r としたとき，中心力ポテンシャル $U(r) = -a/r^n$ $(n > 0,\ a > 0)$ による力を受けながら，質量 m の質点が，原点を中心とする半径 ℓ の円上を等速運動している．

1-1)　質点の速さ v，角運動量 L，円運動の周期 T，質点のもつ全エネルギー E のそれぞれを，a, n, ℓ を含む表記で書き表せ．

1-2)　ある時刻に，この質点の動径方向に弱い力積が与えられ，原点から遠ざかる方向に運動し始めた．動径方向の速度 v_{r} と有効ポテンシャル $U_{\mathrm{eff}}(r)$ を用いると，動径方向の質点の運動は，$mv_{\mathrm{r}}^2/2 + U_{\mathrm{eff}}(r) =$ 一定，の条件を満たす．有効ポテンシャル $U_{\mathrm{eff}}(r)$ を，L を含む表記で書き表せ．

1-3)　$U_{\mathrm{eff}}(r)$ を $r = \ell$ の周りで Taylor 展開して，$U_{\mathrm{eff}}(r)$ を $(r-\ell)$ のべき級数で書き表せ．ただし，3次以上の項を無視してよい．

1-4)　$n = 1$ と $n = 2$ では，質点の動径方向の運動が異なる．1-3) の結果を用いて，この運動の違いを説明せよ．

問2　水平でなめらかな床の上で，バネ定数 k の軽いバネの一端が固定され，もう一端に質量 m の質点が取り付けられている．この質点は x 軸上を運動することができ，ばねの復元力が消失する質点の位置を $x = 0$ とする．

まず，質点に x 軸方向の外力 $F(t) = f\cos(\omega t)$ を加える場合を考える．角振動数 ω は，自由に変化させることができるものとする．

2-1)　外力 $F(t)$ がはたらいているときの質点の運動方程式を書き表せ．

2-2)　質点の位置が $x(t) = x_0\cos(\omega t)$ と書き表される運動をしているとき，x_0 の ω 依存性を求め，その概略図を描け．また，質点の振動の振幅と，質点の振動と外力の間の位相のずれが，どのように ω に依存するか述べよ．

次に，$F(t) = 0$ とし，質点に速度 v に比例する抵抗力 $-2\sqrt{km}\,v$ がはたらく場合を考える．時刻 $t = 0$ において，質点を $x = 0$ から速度 v_0 $(v_0 > 0)$ で打ち出した．

2-3)　$t > 0$ における $x(t)$ を求め，概略図を描け．

2-4)　$t = t_m$ のとき，x が最大値 x_m となった．t_m と x_m のそれぞれの値，および，$t = 0$ から $t = t_m$ の間に失われた力学的エネルギーを求めよ．

平成30年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 I」

[2] 以下の問いに答えよ．ただし，真空の誘電率を ϵ_0 とする．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問1　図2-1に示すように正方形の帯電していない金属線ループが yz 面内にある．$z > 0$ の領域には磁束密度の大きさ B の一様な磁場が x 軸の正の方向にかかっており，時刻 $t = 0$ においてループの下の一部分が $z < 0$ の領域にある．ループは z 軸の負の方向に重力を受けているものとし，重力加速度を g とする．金属線ループの1辺の長さを L，一周の抵抗を R，全体の質量を m とする．ループは充分大きく，落下運動においてループ全てが磁場の外に出てしまうことがないとする．

1-1)　時刻 $t > 0$ においてループが速さ v で落下しているとき，ループに流れる電流の大きさを求めよ．また，その電流の向きを次の選択肢から選び記号で答えよ．
(ア) 紙面に向かって時計回り
(イ) 電流は流れない
(ウ) 両方向 (交流電流) に流れる
(エ) 紙面に向かって反時計回り

1-2)　時刻 $t > 0$ においてループが速さ v で落下しているとき，ループが受ける電磁気的な力の大きさと向きを答えよ．

1-3)　このループの落下運動を表す運動方程式を書け．

1-4)　$t = 0$ でループの速度はゼロであった。$t \geq 0$ におけるループの落下速度 $v(t)$ を求めよ．また，その $v(t)$ の概略図を描け．

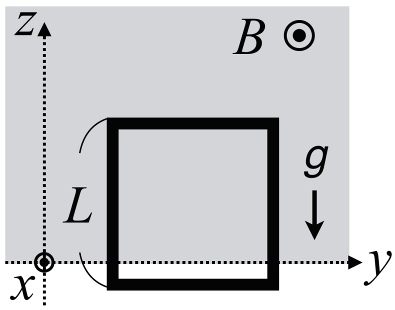

図2-1

問2　半径 a の球体がある．球の中心からの距離を r としたとき，密度 cr (c は正の定数) で電荷が球体内部に分布している．

2-1)　距離 r の関数として，電場の強さおよび電位を求めよ．ただし，無限遠方の電位をゼロとする．

2-2)　全空間の静電場エネルギーを求めよ．

つぎに，この球を内半径 a，外半径 b ($a < b$) の導体の球殻で覆った．球と球殻の中心は一致しており，球から導体の球殻への電荷の移動はないものとする．

2-3)　電場の強さおよび電位を，中心からの距離 r の関数として求めよ．また，それぞれの概略図を描け．