平成30年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 II」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

調和振動子のハミルトニアン $H = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{m}{2}\omega^2 x^2$ で記述される質量 m の粒子の量子力学的運動を考える．ただし，ω を正の定数とし，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$，h をプランク定数とする．座標 x から $q = x\sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}}$ で定義される変数 q に変換するとこのハミルトニアンは以下のように書ける：

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\left(-\frac{d^2}{dq^2} + q^2\right)$$

問1　最初にこの粒子の定常状態を議論する．

1-1)

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q - \frac{d}{dq}\right), \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q + \frac{d}{dq}\right)$$

で定義される演算子に対して交換関係 $[a, a^\dagger]$ を求めよ．

1-2)　ハミルトニアンを $a^\dagger$，a で表わせ．

1-3)　基底状態の規格化された波動関数 $\psi_0(q)$ は

$$a\,\psi_0(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q + \frac{d}{dq}\right)\psi_0(q) = 0 \tag{1}$$

によって定義される．式 (1) を $\psi_0(q)$ に対する q についての微分方程式とみなして解き，$\psi_0(q)$ を求めよ．ただし，波動関数の規格化は行わなくてよい．

1-4)　第一励起状態の波動関数 $\psi_1(q)$ は

$$\psi_1(q) = a^\dagger\,\psi_0(q)$$

と書けることが知られている．これから $\psi_1(q)$ を求めよ．ただし，波動関数の規格化は行わなくてよい．また，$|\psi_1(q)|^2$ の概形を q の関数として図示せよ．

1-5)　第一励起状態にある粒子が存在する確率が最大となる q の値を求めよ．

問2　次にこの粒子の状態の時間発展を議論する．波動関数の時間発展は以下のシュレディンガー方程式により記述される：

$$i\hbar\frac{\partial\psi_j(q,t)}{\partial t} = H\,\psi_j(q,t) \quad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

ただし，$\psi_0(q,t)$ は基底状態の波動関数，$\psi_j(q,t)$ $(j = 1, 2, \cdots)$ は第 j 励起状態の波動関数を表し，$\psi_j(q,t)$ に対する固有エネルギーを E_j $(j = 0, 1, 2, \cdots)$ とする．

2-1)　時刻 t における波動関数 $\psi_j(q,t)$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$ を，時刻 $t = 0$ における波動関数 $\psi_j(q,0)$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$ で表せ．

さらに時刻 t において

$$\Phi_{\mathrm{A}}(q,t) = \sqrt{1-c^2}\ \psi_0(q,t) + c\,\psi_1(q,t)$$

のように，二つの固有状態の重ね合わせで書ける状態を定義する．ただし，$0 < c < 1$ は実数の定数であり，$\psi_j(q,t)$ $(j=0,1)$ は次のような正規直交化された波動関数である：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_j^*(q,t)\,\psi_k(q,t)\,dq = \delta_{jk}$$

2-2) この系が時刻 $t=0$ で状態 Φ_{A} にあったとき，時刻 t で別の状態

$$\Phi_{\mathrm{B}}(q) = -c\,\psi_0(q,0) + \sqrt{1-c^2}\ \psi_1(q,0) \tag{2}$$

に見出される確率振幅 $\mathcal{A}(\mathrm{A}\to\mathrm{B},t)$ は次式で与えられる：

$$\mathcal{A}(\mathrm{A}\to\mathrm{B},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\mathrm{B}}^*(q)\,\Phi_{\mathrm{A}}(q,t)\,dq$$

$\mathcal{A}(\mathrm{A}\to\mathrm{B},t)$ を c，E_0，E_1，t，$\hbar$ で表せ．

2-3) この系が時刻 t で Φ_{B} の状態に見出される確率は $|\mathcal{A}(\mathrm{A}\to\mathrm{B},t)|^2$ と表せる．この確率を求め，確率の概形を t の関数として図示せよ．

平成30年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 II」

[2] 以下の問いに答えよ．ただし，ボルツマン定数を k とし，プランク定数を $h, \hbar = \frac{h}{2\pi}$ とする．また，絶対温度を T とし，$\beta = (kT)^{-1}$ とする．g は重力加速度の大きさとする．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問1　一辺の長さが L の3次元の箱の中に質量 m の自由粒子が N 個入っている．このとき，粒子 $j(j = 1, 2, 3, \cdots, N)$ のエネルギー固有状態は離散化され，正の整数組 (a, b, c) で指定される．対応するエネルギー固有値は $E_0(a^2 + b^2 + c^2)$ で与えられる．E_0 は $E_0 = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ である．この系は温度 T でカノニカル分布に従って平衡状態になっている．

1-1)　分配関数 Z が

$$Z = \frac{1}{N!}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-\beta E_0 n^2]\right)^{3N} \tag{1}$$

になることを示せ．

1-2)　$\beta E_0 \ll 1$ のとき，$Z = \dfrac{1}{N!}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\beta E_0}}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{3N}$ になることを示せ．必要であれば，以下の公式を用いよ．(α は正の定数とする.)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\alpha x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{2}$$

1-3)　エネルギーの平均値 $< E >$ を n, k, T を用いて表せ．

1-4)　スターリングの公式 $N! \sim (N/e)^N$ を用いて，ヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ．

1-5)　$N =$ (一定) のとき，F の全微分は $\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - P\mathrm{d}V$ で与えられる．この関係を用いて，理想気体の状態方程式 $PV = NkT$ を導け．S, P および V はエントロピー，圧力および体積である．

問2　単原子分子が N 個集まった量子性の無視できる理想気体の系を考える．単原子分子一個の質量は m であり，$0 \leq x \leq L,\ 0 \leq y \leq L,\ 0 \leq z \leq H$ の箱に閉じこめられている．それぞれの単原子分子には外力ポテンシャル $v(z) = mgz$ がかかっており，この系の温度は T で一様になっているとき，密度 $\rho(z)$ は $\exp(-\beta mgz)$ に比例する．

2-1)　運動エネルギーに関して，エネルギー等分配則が成り立つ．運動エネルギーの平均値を求めよ．

2-2)　ポテンシャルエネルギーの平均値を求めよ．

2-3)　高温極限 $kT \gg mgH$ におけるエネルギーの平均値を T の一次の項まで求めよ．

2-4)　$T \to 0$ における比熱を求めよ．

2-5)　2-4) で求めた比熱は外力ポテンシャルがないときの理想気体の比熱よりも大きくなる．その理由について簡潔に述べよ．