2019年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「数学」

以下の問いに答えよ．結果だけではなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問 1　以下で定義される多項式 $L_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を考える．

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x} \right)$$

1-1)　$L_1(x)$ および $L_2(x)$ を求めよ．

1-2)　多項式 $L_n(x)$ は以下の母関数を用いて定義することもできる．

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} t^m L_m(x) = \frac{1}{1-t} \exp\left[\frac{-tx}{1-t} \right] \qquad (0 \leq t < 1)$$

$L_1(x)$ および $L_2(x)$ を母関数から求めよ．

1-3)　以下の積分を計算せよ．

$$\int_0^{\infty} dx\, e^{-x} L_1(x) L_2(x)$$

問 2　パウリ行列 $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ および単位行列 I は以下で定義される．

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで，$i^2 = -1$ であり，以下において，ベクトル $\vec{n}$ は $|\vec{n}| = 1$ を満たす単位ベクトルとする．

2-1)　行列 $S = \vec{n} \cdot \vec{\sigma}$ が以下を満たすことを示せ．

$$S^2 = I$$

2-2)　実数パラメータ ϕ をもつ行列 $\exp[i\phi S]$ は以下の級数により定義される．

$$\exp[i\phi S] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (i\phi S)^m$$

2-1) で示した関係式を用いて，行列 $\exp[i\phi S]$ が以下のように表されることを示せ．

$$\exp[i\phi S] = f(\phi) I + i g(\phi) S$$

また，関数 $f(\phi)$ および $g(\phi)$ を計算せよ．

2019年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 I」

[1] 以下の問いに答えよ. 結果だけでなく, 求め方や計算の過程も示すこと. 重力加速度の大きさを g とする.

問 1　図 1-1 に示すように, 水平面と角度 θ をなす斜面を落ちる半径 R, 質量 M の球の運動を考える. 時刻 0 において, 斜面上に球を初速度 0, 回転の角速度 0 で静かに置いた. 斜面は充分に長く, 球が斜面上にある場合だけを考えればよい. 球と斜面の間の静止摩擦係数を μ, 動摩擦係数を μ' として, 空気抵抗は考えない. 球の密度分布は中心に対して球対称であり, 中心を通る回転軸のまわりの慣性モーメントは正の定数 b を用いて bMR^2 で表されるものとする.

まず, 球が滑らずに転がり落ちる場合について考える.

1-1)　球にはたらく斜面からの垂直抗力の大きさを求めよ.

1-2)　時刻 t における球の重心速度の大きさと, 回転の角速度の大きさを b, g, t, M, R, θ, μ から必要なものを用いて表せ.

1-3)　球にはたらく斜面からの静止摩擦力の大きさを求めよ.

1-4)　球が滑らずに転がり落ちるための μ の下限値を求めよ.

1-5)　密度が一様な球の場合と, 内部が中空の球殻の場合ではどちらが速く転がり落ちるか, 理由も含めて簡単に説明せよ.

つぎに, 球が滑りながら, 斜面から動摩擦力を受けて転がり落ちる場合について考える.

1-6)　時刻 t における球の重心速度の大きさと, 回転の角速度の大きさを b, g, t, M, R, θ, μ' から必要なものを用いて表せ.

1-7)　球が時刻 0 から鉛直方向に高さ h だけ落ちる間に, 動摩擦力がした仕事を求めよ.

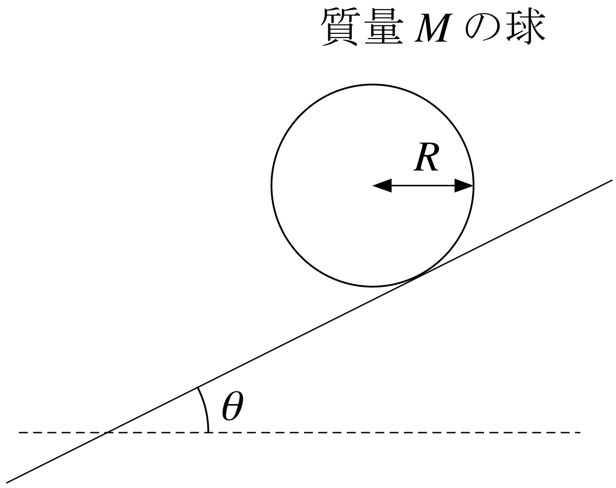

図 1-1

2019年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 I」

[2] 以下の問いに答えよ．ただし，真空の誘電率を ϵ_0，真空の透磁率を μ_0 とする．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問1　真空中に，電荷密度 ρ で内部まで一様に帯電した半径 a の球がある．この帯電球の中心を原点とし，原点からの距離を r とする．

1-1)　球の内部と外部に生じる静電場の大きさ $E(r)$ を求めよ．

1-2)　球の内部と外部での静電ポテンシャル $\phi(r)$ を求めよ．ただし，無限遠をポテンシャルの原点とする．

帯電球の静電エネルギーは，無限遠（ポテンシャルの原点）から電荷を運び，球を帯電させるために必要な仕事の総和として与えられる．

1-3)　電荷密度 ρ で内部まで一様に帯電した半径 $r\,(< a)$ の球を考え，その外側表面（厚さ dr）を一様な電荷密度 ρ で帯電させるのに必要な仕事を求めよ．ただし，$dr \ll r$ とする．

1-4)　半径 a の帯電球のもつ静電エネルギーを求めよ．

問2　図2-1のように，真空中に半径 a の円形の導線があり，その中心Oを xyz 直交座標の原点とする．円形導線は xy 平面にあるとし，円形導線には定常電流 I が z 軸正方向から見て反時計回りの方向に流れている．ビオサバールの法則によると，円形導線上の点Rにある電流素片 $I\boldsymbol{ds}$ が z 軸上の点Qにつくる磁束密度 $d\boldsymbol{B}$ は以下で与えられる．

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\boldsymbol{ds} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

ここで，$\boldsymbol{r}$ は点Rから点Qに向かうベクトル，また $\boldsymbol{ds} = \boldsymbol{n}ds$ である．ただし，s は円形導線に沿った長さ，$\boldsymbol{n}$ は電流が流れる方向を正にとった点Rでの単位接線ベクトルである．また，$r = |\boldsymbol{r}|$ である．

2-1)　原点Oでの磁束密度の大きさを求めよ．

2-2)　点Qの座標を $(0, 0, z)$ としたとき，点Qでの磁束密度の大きさを求めよ．

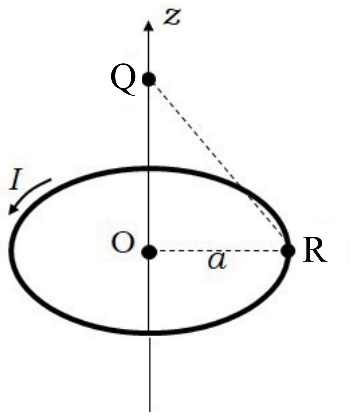

図2-1

問 3　図 2-2 のように，真空中に半径 a の円形導線と充分に長い直線導線が置かれており，いずれも xy 平面内にあるとする．円形導線には電流 I_1 が反時計回りの方向に流れており，直線導線には電流 I_2 が y 軸正方向に流れている．円形導線の中心と直線導線の距離は $d\ (>a)$ である．円形導線上において x 軸から角度 θ にある点を R とする．

3-1)　点 R において電流 I_2 がつくる磁束密度の大きさを求めよ．

3-2)　点 R における電流素片 $I_1 d\boldsymbol{s}$ が電流 I_2 から受ける力を求めよ．ただし，原点 O から点 R に向かう方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_{\mathrm{R}}$ とする．ここで $d\boldsymbol{s}$ は，問 2 と同様に，点 R での円形導線の微小接線ベクトルとする．

3-3)　円形導線が電流 I_2 から受ける力の大きさと向きを求めよ．ただし，答えは積分を残したままで良い．

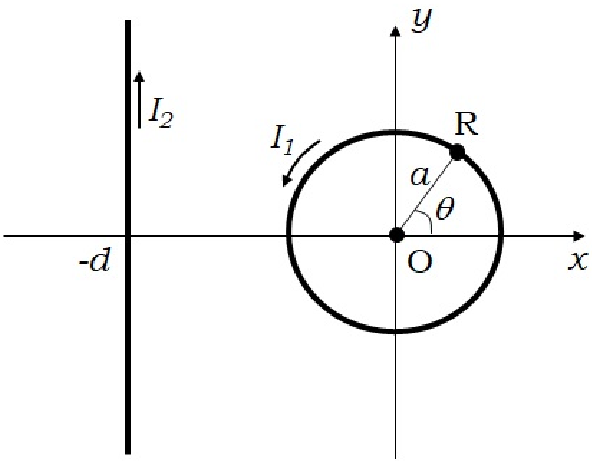

図 2-2