2019年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学II」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．プランク定数を h, $\hbar \equiv \dfrac{h}{2\pi}$ とする．

問1 式(1)または(2)で表される一次元ポテンシャルに $x<0$ の領域から正の向きに，質量 m，エネルギー E の自由粒子が入射する．a_0 を正の定数として $V_0 = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{ma_0^2}$ とする．透過率は，粒子が $x<0$ から入射して $x>a$ の領域に到達する確率で，波動関数では $\left|\dfrac{\text{透過波の振幅}}{\text{入射波の振幅}}\right|^2$ で表される．なお，問1-2)以降では，透過率が1になるときの，粒子のド・ブロイ波長についての考察から答えてもよい．

ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ V_0 & (0 \le x \le a) \\ 0 & (x>a) \end{cases} \tag{1}$$

に $E>V_0$ の粒子が入射する場合，

1-1) 透過率を求めよ，

1-2) $a=a_0$ のとき透過率が1になる最小の E を求めよ．

ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ -V_0 & (0 \le x \le a) \\ 0 & (x>a) \end{cases} \tag{2}$$

に $E>0$ の粒子が入射する場合，

1-3) $a=a_0$ のとき透過率が1になる最小の E を求めよ．

a を a_0 から大きくしていくと $(a>a_0)$，

1-4) 透過率が1になる最小の E は，$0 \le x \le a$ で (1) $V(x)=V_0$ の場合 $(E>V_0)$ と (2) $V(x)=-V_0$ の場合 $(E>0)$ で，それぞれどのように変わるか，古典論に言及して比較せよ．

問2 時間に依存しない一様な磁場 $\boldsymbol{B}$ の中に置かれた真空中の電子のスピンについて考える．磁場 $\boldsymbol{B}$ の向きを z 軸とし，スピン演算子 $\boldsymbol{s} = \dfrac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ の z 成分を対角化したパウリのスピン行列 $\boldsymbol{\sigma}$ を

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

とする．磁場との相互作用のハミルトニアンを $\mathcal{H} = \mu\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}$ (μ は定数) とし，時刻 t のスピン状態はスピン $\pm\dfrac{1}{2}$ の固有状態の線形結合と考えて，以下の問いに答えよ．固有関数は規格化されているものとする．

2-1) σ_z の2つの固有関数 (固有ベクトル) を求めよ．

2-2) σ_x の2つの固有関数を求めよ．

2-3) 時刻 $t=0$ のとき $s_x = \dfrac{1}{2}\hbar$ の状態にあったとして，時刻 t のとき $s_x = \dfrac{1}{2}\hbar$ の状態にある確率を求めよ．

2-4) xy 平面内で回転する大きさ一定の磁場を磁場 $\boldsymbol{B}$ に加えると，ある回転周期のとき共鳴が起こる．この共鳴周期を求めよ．シュレディンガー方程式やハイゼンベルク方程式を解く必要はない．

2019年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学II」

[2] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．プランク定数を h，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$，ボルツマン定数を k_{B}，温度を T として $\beta = \dfrac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$ とする．

問1　互いに相互作用しない区別できる N 個のスピン1の粒子からなる系を考える．ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -q_z \sum_{i=1}^{N} S_z^2(i)$$

と表せるものとする．ここで，$q_z(>0)$ はエネルギーの次元を持つ量である．また，$S_z(i)$ は i 番目の粒子のスピンの z 成分であり，その固有値は $+1, 0, -1$ である．以下では，系は温度 T の熱平衡状態にあるものとして，$\langle A \rangle$ は物理量 A の統計力学的な平均値を表すこととする．

1-1)　分配関数 $Z(T)$ を求めよ．

1-2)　熱容量 $C(T)$ を求めよ．

1-3)　系のエントロピーは温度 T に対する有効的な縮退度と関係している．$T \to \infty$ 及び $T = 0$ におけるエントロピーを求めよ．

1-4)　1粒子あたりのスピンの z 成分の平均値 $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \langle S_z(i) \rangle$ を求めよ．

1-5)　$\chi(T) \equiv \displaystyle\lim_{q_z \to 0} \frac{\langle Q_z \rangle}{q_z}$ を求めよ．ここで，$Q_z \equiv \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left[S_z^2(i) - \frac{2}{3}\right]$ である．

問2　1粒子の運動量とエネルギーがそれぞれ $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y)$，$E(\boldsymbol{p})$ で表される二次元自由フェルミ粒子系を考える．ただし，スピン自由度は考えなくてよい．

2-1)　$E(\boldsymbol{p}) = \dfrac{|\boldsymbol{p}|^2}{2M}$ のとき，単位面積あたりの状態密度をエネルギー E の関数として求めよ．ただし $M(>0)$ とする．

以下では，$E(\boldsymbol{p})$ は $\Delta(>0)$，$\alpha(>0)$ の定数を用いて，$E(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\Delta^2 + \alpha|\boldsymbol{p}|^2}$ とする．

2-2)　定数 α の次元を，長さ ℓ，質量 m，時間 t の記号を用いて求めよ．例えばエネルギーであれば $\mathrm{m}\ell^2\mathrm{t}^{-2}$ である．

2-3)　単位面積あたりの状態密度を求め，エネルギー E の関数として $E = 0$ から $E = 2\Delta$ までを図示せよ．

2-4)　$T = 0$ においてグランドカノニカル分布を考え，系の全粒子数の期待値 $\langle N \rangle$ を化学ポテンシャル μ_0 を用いて表せ．