平成28年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「数学」

以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問1　Euler 多項式 $E_k(x)$ は，母関数を用いて以下のように定義される．

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(x)\frac{t^k}{k!} \tag{1}$$

3つの Euler 多項式 $E_0(x)$, $E_1(x)$ および $E_2(x)$ を求めよ．

問2　以下の行列方程式を考える．

$$A\vec{X} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv \lambda\vec{X} \tag{2}$$

ここで $\vec{X}$ は固有値 $\lambda \neq 0$ に対する固有ベクトルである．固有ベクトルの全ての成分 (x_1, x_2, x_3) は実数であり次式により規格化されているものとする．

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \tag{3}$$

2-1)　行列 A の全ての実固有値 λ を求めよ．

2-2)　もっとも大きな実固有値 λ について，式 (3) で規格化された実数の固有ベクトル $\vec{X}$ を求めよ．

問3　複素平面上に，$|z| = 1$ の円周を反時計回りに一周する積分路 C がある．以下の積分を求めよ．

3-1)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \exp\left[\frac{1}{z}\right]\, dz \tag{4}$$

3-2)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \exp\left[\exp\frac{1}{z}\right]\, dz \tag{5}$$

ヒント：指数関数をべき級数展開し，留数定理を適用する．

平成28年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学I」

[1] 以下の問いに答えよ．ただし，重力加速度の大きさを g とする．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問1 図1-1のように，一端を壁に固定されたバネ定数 k のバネがあり，その他端に質量 m_{A} の物体Aが取り付けられている．バネは自然長の状態で水平面に置かれ，バネと物体Aは静止している．この物体Aに，速度 v で運動している質量 m_{B} の物体Bが時刻 $t=0$ に衝突する．物体AとB，バネの運動は x 軸上 (バネの長さ方向) に束縛され，水平面はなめらかで物体A，Bとの摩擦は無視できる．また物体AとBの大きさは無視できるものとして以下の問いに答えよ．

最初に，完全非弾性衝突の場合を考える．

1-1) 衝突直後の物体Aの速度 v_{A} を求めよ．また衝突後の物体Aの位置 $x_{\mathrm{A}}(t)$ を求めよ．

1-2) 衝突前の全運動エネルギーと衝突後の全運動エネルギーの比を求めよ．

次に，完全弾性衝突の場合を考える．

1-3) 物体A, Bそれぞれの衝突直後の速度 v_{A}, v_{B} を求めよ．

1-4) $m_{\mathrm{A}}/m_{\mathrm{B}}=2$ としたとき，物体A，物体Bそれぞれの衝突後の位置 $x_{\mathrm{A}}(t)$，$x_{\mathrm{B}}(t)$ を求めよ．また $m_{\mathrm{A}}/m_{\mathrm{B}}=1$ のとき，物体Aと物体Bが2回目に衝突するまでの時間を求めよ．

1-5) 次に，$m_{\mathrm{A}}/m_{\mathrm{B}}=1$ とし，物体Aには速度に比例した抵抗 $-\lambda\dot{x}_{\mathrm{A}}(t)(\lambda>0)$ が働く場合を考える．衝突後，物体Aは一度も $x<0$ の領域に入ることなく，充分時間が経過した後，ゆっくりと $x=0$ に近づいた．このとき λ が満たすべき条件を m_{A}，k を用いて示せ．

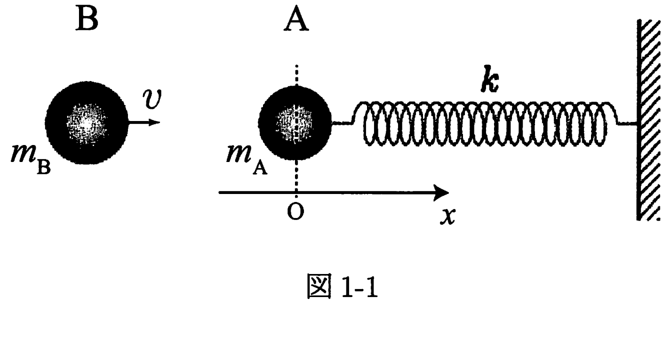

図1-1

問2 図 1-2 に示すように, 質量 M, 長さ L の一様な剛体とみなせる細い棒があり，その棒の両端がそれぞれ x 軸上と z 軸上を離れないように束縛され，なめらかに動くようにしてある．棒の重心座標を (x, z), 棒が z 軸となす角を φ (時計回りの方向を正) とする．また，紙面に垂直な方向 (手前から奥に向かう方向) を y 軸とする．重力が z 軸の負の向きに働いているものとし, 以下の問いに答えよ．

2-1) y 軸に平行で棒の中点を通る軸のまわりの慣性モーメント I を求めよ．

2-2) 棒の位置エネルギー U を φ の関数として表せ．ただし，$\varphi = 0$ のとき $U = 0$ とする．

2-3) 棒の運動エネルギー K を $\dot{\varphi}$ の関数として表せ．

2-4) 棒が x 軸から受ける抗力 (z 軸の正の方向を正とする) を D_z とし，棒が z 軸から受ける抗力 (x 軸の正の方向を正とする) を D_x とするとき，重心運動と回転運動に対する運動方程式を書け．

2-5) 2-4) で求めた運動方程式から D_z, D_x を消去し，φ についての微分方程式を求めよ．

2-6) 棒の力学的エネルギーが保存することを，φ についての微分方程式を用いて示せ．

2-7) 時刻 $t = 0$ において $\varphi = 0$ の位置で $\dot{\varphi} = \omega_0$ の角速度を与えて棒を離した．この棒の運動が $|\varphi(t)| \ll 1$ のとき，運動方程式を近似的に解き $\varphi(t)$ を求めよ．

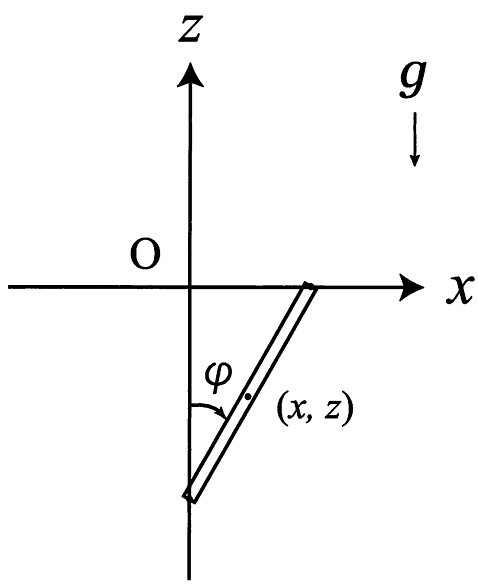

図 1-2

平成28年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学I」

[2] 以下の問いに答えよ．ただし，真空の誘電率を ϵ_0，真空の透磁率を μ_0 とする．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問1 真空中に，一様な電荷密度 ρ $(\rho > 0)$ で正電荷が分布している半径 a の球がある．球内は電荷を除き真空とみなせるものとする．球の中心からの距離を r として，以下の問いに答えよ．

1-1) $r \leq a$ の位置および $r > a$ の位置における電場の強さをそれぞれ求めよ．また，r に対する電場の強さの概略をグラフに描け．

1-2) 球の表面の位置 $(r = a)$，および球の中心 $(r = 0)$ における電位を求めよ．ただし無限遠における電位をゼロとする．

1-3) この球の内部の位置 (中心を除く) に，質量 m をもつ負の点電荷 e $(e < 0)$ を静かに置いたところ，点電荷は運動を始めた．点電荷はどのような運動を行うか，理由も含めて2行程度で述べよ．ただし，点電荷の運動による電磁波の放射や球の電荷分布の変化はないものとする．

問2 真空中に，一様な電荷密度 ρ で電荷が分布している半径 a の球があり，球内は電荷を除き真空とみなせるものとする．球は，図2-1のように座標原点を中心として置かれており，z 軸を回転軸として，z の正方向からみて反時計回りに一定の角速度 ω で回転している．電荷は球とともに運動し，電流を生じる．以下の問いに答えよ．

2-1) 座標原点から距離 r $(r \gg a)$ 離れた位置における磁束密度の大きさが，r に対してどのような依存性を持つか，理由も含めて2行程度で述べよ．

2-2) 点 $(x, 0, 0)$ (ただし $0 < x < a$) における電流密度ベクトル $\boldsymbol{j}$ を求めよ．

2-3) 球の内部のある点における電流密度が作る微小な磁束密度に着目する．ある点 $\boldsymbol{r}'$ を含む微小な体積要素 $\Delta V'$ 中の電流素片が点 $\boldsymbol{r}$ に作る微小な磁束密度は，

$$\Delta \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \Delta V' \tag{1}$$

で与えられる．$\boldsymbol{r}' = (x, 0, 0)$ のとき z 軸上の点 $(0, 0, z)$ に作られる $\Delta \boldsymbol{B}$ を $\Delta \boldsymbol{B}_+$ と定義する．$\Delta \boldsymbol{B}_+$ を求め，$\mu_0, \rho, \omega, x, z$ および $\Delta V'$ を用いて表せ．

2-4) 式(1)において $\boldsymbol{r}' = (-x, 0, 0)$ のとき z 軸上の点 $(0, 0, z)$ に作られる $\Delta \boldsymbol{B}$ を $\Delta \boldsymbol{B}_-$ と定義する．$\Delta \boldsymbol{B}_+$ と $\Delta \boldsymbol{B}_-$ の合成ベクトル $(\Delta \boldsymbol{B}_+ + \Delta \boldsymbol{B}_-)$ を求め，$\mu_0, \rho, \omega, x, z$ および $\Delta V'$ を用いて表せ．

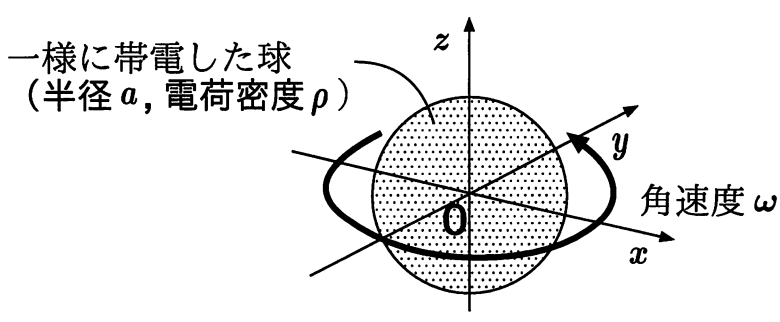

図2-1

2-5) 2-4) の結果を利用し，球内の全電流が z 軸上の点 $(0,0,z)$ に作る磁束密度

$$\boldsymbol{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} dV'$$

を求めよ．ただし簡単のために，z 軸上の点は球から充分離れており，$z \gg a$ を満たすものとする．必要であれば $\int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta = \frac{4}{3}$ であることを用いてよい．