平成28年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学II」

[1] 以下の問に答えよ．ただし，プランク定数を h，$\hbar = h/(2\pi)$ とする．解答は，結果だけではなく求め方の説明，あるいは計算の過程も示すこと．

問1　原点からの距離を r として，半径 a の無限に高い3次元球形井戸型ポテンシャル $V(r)$

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \infty, & r \geq a \end{cases}$$

中を運動する質量 m の量子力学的粒子を考える．エネルギー $E_{n,\ell}$ の定常状態に対する動径波動関数 $R_{n\ell}(r)$ は，動径量子数 $n = 1, 2, \cdots$，方位量子数 ℓ によって指定され，動径方向に対するシュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(rR_{n,\ell}(r)\right) + \left(V(r) + \frac{A}{2mr^2}\right)R_{n,\ell}(r) = E_{n,\ell}R_{n,\ell}(r) \tag{1}$$

を満たす．ここで A は ℓ に依存する定数である．

1-1) 定数 A は角運動量演算子の2乗 $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ の固有値である． 定数 A を方位量子数 ℓ と必要な物理量を用いて表せ．この問題は答えだけで良い．

1-2) $\ell = 0$ のとき，$A = 0$ であり，波動関数は角度依存性を持たない．$\ell = 0$ のエネルギー $E_{n,0}$ とその動径波動関数 $R_{n,0}$ を求めよ．波動関数は，$\displaystyle\int |R_{n,0}|^2 dV = 1$ で規格化せよ．（ヒント： $R_{n,0} = \dfrac{\chi_n(r)}{r}$ と置き，χ_n に対する微分方程式を解け.）

1-3) 半径 r から $r + dr$ の球殻に粒子が存在する確率を $\sigma(r)dr$ と書いたとき，$\ell = 0$, $n = 3$ の状態に対する確率密度 $\sigma(r)$ の概略を，ゼロとなる点が分かるように，r の関数として図示せよ．

1-4) 井戸の壁は球対称性を保ちつつ移動可能とし，壁を広げるのに単位体積当たり $B > 0$ のエネルギーを必要とする．粒子が基底状態に1つあるとき，全系のエネルギーを最小にする井戸の半径 r_0 を求めよ．

問2　スピン1を持つ粒子を考える．スピン演算子を $\hat{\boldsymbol{S}}$ として，無次元スピン演算子 $\hat{\boldsymbol{s}}$ を $\hat{\boldsymbol{S}} = \hbar\hat{\boldsymbol{s}}$ で定義する．z 方向を量子化の軸にとり，スピン演算子 $\hat{s}_x$, $\hat{s}_z$ を行列で表現すると，

$$\hat{s}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{s}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．

2-1) スピン演算子 $\hat{s}_y$ を行列で表せ．

2-2) $\hat{s}_x$ の固有値は，$+1$, 0, -1 である．固有値 $+1$ と -1 に対応する規格化された固有ベクトル $\vec{p}_x$ と $\vec{n}_x$ を求めよ．

スピン1の粒子に一様な磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ をかける．相互作用ハミルトニアンは，$\hat{H} = -\mu\boldsymbol{B}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}$ で与えられる．粒子は静止しているとして，軌道運動は無視できるとする．

2-3) $\hat{H}$ のエネルギー固有値と対応する固有状態を全て求めよ．

2-4) x 方向のスピン $+1$ の状態 $\vec{p}_x$ を作り，そのエネルギーを測定した．1 回の測定で得られるエネルギー値について，量子力学的確率をふまえて，説明せよ．また，この測定を数多く行ったとき，それぞれのエネルギー値が得られる確率を答えよ．なお，測定は状態生成後すぐに行えるとして，系の時間発展は考える必要はない．

2-5) 系の時間発展を考える．時刻 t のスピン状態 $\vec{\chi}(t)$ はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}\vec{\chi}(t) = \hat{H}\vec{\chi}(t)$$

で与えられる．$\vec{\chi}(t)$ の各成分 $c_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ に対する微分方程式を書き下し，それを解くことで，$t > 0$ に対する $\vec{\chi}(t)$ を求めよ．初期条件は $c_i(0) = c_i$ とする．

2-6) $t = 0$ でのスピン状態 $\vec{\chi}(0)$ が $\vec{p}_x$ であったとき，時刻 $t > 0$ でスピンが反転している確率を求めよ．

平成２８年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学II」

[2] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．温度を T，ボルツマン定数を k_{B} として逆温度 $\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$，自然対数を $\log$ とする．

問１　N 個の独立な粒子から成る系がある．各粒子は３つのエネルギー状態しかとりえないとする．３つの状態のうち，状態１はエネルギー Δ，状態２は 0，状態３は $-\Delta$ をとる．状態 $i(i=1,2,3)$ の粒子数を N_i とし，ミクロカノニカル統計の考え方を用いて以下の設問に答えよ．なお，$N \gg 1$，$N_i \gg 1$ としてよい．

1-1)　エントロピー S を微視的な状態数 W を用いて表せ．

1-2)　この系の微視的な状態数 W を N, N_1, N_2, N_3 を用いて表せ．

1-3)　スターリングの公式 $\log N! \simeq N\log N - N$ を用いて，S を N, N_1, N_2, N_3 の関数として表せ．

1-4)　一粒子あたりの平均エネルギーを $\epsilon\Delta$，$N_2 = n_2 N$ と書くと，1-3) で求めた S は以下のように書けることを示せ．

$$S = -k_{\mathrm{B}}N\left[\left(\frac{1+\epsilon-n_2}{2}\right)\log\left(\frac{1+\epsilon-n_2}{2}\right) + n_2\log n_2 + \left(\frac{1-\epsilon-n_2}{2}\right)\log\left(\frac{1-\epsilon-n_2}{2}\right)\right].$$

1-5)　N, ϵ を一定に保ちつつ，エントロピーが最大になるとき $(2n_2)^2 = (1-n_2)^2 - \epsilon^2$ が成り立つことを示せ．

1-6)　1-5) の結果を用いて，温度 T の平衡状態における一粒子あたりの平均エネルギーを $\bar{\epsilon}\Delta$ とすると

$$\bar{\epsilon} = -\frac{2\sinh(\beta\Delta)}{1+2\cosh(\beta\Delta)}$$

であることを示せ．

問２　エネルギー分散関係が $E = A|\vec{k}|^n$ で与えられる d 次元空間上の自由粒子について以下の設問に答えよ．ここで，$\vec{k}$ は d 次元の波数ベクトル $\vec{k} = (k_1, k_2, \cdots, k_d)$ であり，n, d は正の整数，$A > 0$ とし，スピンの自由度は考えなくてよい．離散的な波数の和に関しては，連続極限をとったときの関係：

$$\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} \to \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}$$

を用いよ．ここで，V は系の d 次元体積である．

2-1)　物理量 O の次元を $[O]$ で表す．A の次元 $[A]$ を，長さ L，時間 T，質量 M の記号で表せ．例えば運動量 p であれば $[p]$ =MLT^{-1} である．

2-2)　$n=2$，$d=3$ のときの単位体積あたりの状態密度 $\rho(E)$ を A, E を用いて表せ．

2-3)　単位体積あたりの状態密度 $\rho(E)$ は $\rho(E) \propto E^{(d-n)/n}$ となることを示せ．

2-4)　粒子数が固定されないボーズ粒子系の場合を考える．温度 T における粒子数が T^{α} に比例することを示し，α を n，d を用いて表せ．ただし，化学ポテンシャル μ は温度によらず $\mu = 0$ とし，ボーズ凝縮は考えないものとする．

2-5)　この粒子がフェルミ粒子の場合に，$T=0$ における一粒子あたりの平均エネルギー ϵ_0 をフェルミエネルギー ϵ_{F}，n，d を用いて表せ．