平成29年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「数学」

以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問1　a を 0 でない実数として，次のような積分を考える．

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{dz}{z^2 + a^2} \tag{1}$$

1-1)　z を複素変数としたとき，被積分関数の複素平面における極の位置を全て求めよ．

1-2)　この積分を求めるための複素平面内の積分路を図示せよ．

1-3)　$I(a)$ の値を複素積分の方法で求めよ．

問2　次のような 3×3 の行列を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

ここで，$A^0 = I$ である．行列 A の全ての固有値を $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ としたとき， 次の関係を満たす 3×3 の正則行列 Ω が存在する．

$$\Omega A \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

また，任意の正方行列 Z に対して，その指数関数は次式で定義される．

$$\exp Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Z^n \tag{4}$$

2-1)　3×3 行列である A^2 および A^3 を求めよ．

2-2)　高次の行列積 A^n $(n = 4, 5, 6, \ldots)$ が A，A^2，または I に等しいことを証明せよ．

2-3)　A の固有値を求めるための固有方程式を書け．また，固有値 λ_1，λ_2，λ_3 を示せ．

2-4)　適当な実数パラメータを x として

$$B(x) = \exp(xA) \tag{5}$$

とおく．このとき，3×3 行列 $\Omega B(x) \Omega^{-1}$ を求めよ．

2-5)　$B(x)$ を式 (4) を用いて展開し

$$B(x) = b_0(x) I + b_1(x) A + b_2(x) A^2 \tag{6}$$

とおく．この式を用いて $\Omega B(x) \Omega^{-1}$ を求め，その行列のトレースを取って比較することで $b_0(x)$ を求めよ．ただし，2-3) で求めた λ_1，λ_2，λ_3 を用いよ．

2-6)　以上の結果を用いて，次の級数和を求めよ．

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{3m}}{(3m)!} \tag{7}$$

平成29年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学I」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．$i=\sqrt{-1}$ とする．

問1　図1のように3個のおもり（質量は左から m_1，m_2，m_3 とする）を4本のバネ定数 k $(k>0)$ のバネでつなぎ，自然長の状態でバネの両端を固定する．おもりはなめらかな床におかれ，バネの方向にのみ運動する．x 軸の正の向きを右側にとる．左から n 番目のおもりのつりあいの位置から測った変位を x_n として以下の問いに答えよ．

1-1)　3個のおもりの質量が全て m の場合，おもりの変位の運動方程式が

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} &= -k(2x_1-x_2)\\
m\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} &= -k(2x_2-x_1-x_3)\\
m\frac{\mathrm{d}^2x_3}{\mathrm{d}t^2} &= -k(2x_3-x_2)
\end{aligned}
$$

となることを示せ．振動の基準振動を求めるため $x_n=a_n\,e^{i\omega t}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \omega>0)$ とおき，a_1，a_2，a_3 の間の関係式（連立方程式）を求めよ．

1-2)　1-1) で求めた関係式から系の固有角振動数（3通り）を求めよ．

1-3)　1-2) で求めたそれぞれの固有角振動数に対する基準振動について，a_1，a_2，a_3 の間の関係式を求めよ．

1-4)　$m_1=m_3=m$，$m_2=M$ の場合に，それぞれの基準振動の固有角振動数を求めよ．

1-5)　1-4) で $M\gg m$ としたとき，それぞれのおもりの運動の様子を簡単に説明せよ．

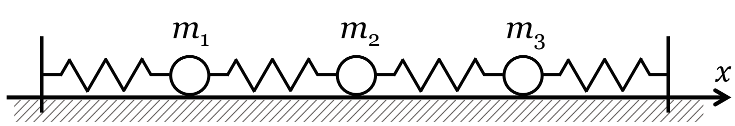

図1

平成29年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学I」

[2] 以下の問いに答えよ．ただし，真空の誘電率を ϵ_0，真空の透磁率を μ_0 とする．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問1　図2-1のように，内半径 a，外半径 $b\ (>a)$ をもつ帯電していない導体球殻Aが中心を原点にして真空中に存在する．

電荷 $q\ (>0)$ をもつ半径 $c\ (<a)$ の導体球Bを原点を中心にしておいたとき，以下の問いに答えよ．

1-1)　導体球殻Aの内側の面 (内半径 a の面) に誘導される電荷の面密度を求めよ．

1-2)　無限遠の電位をゼロとした場合，原点から距離 r だけ離れた点の電位を求め，電位と距離との関係をグラフで示せ．

1-3)　導体球殻Aと導体球Bからなるコンデンサとしてみた場合，その電気容量を求めよ．また，導体球Bの半径 c が $c<a$ の範囲で自在に変えられる場合，電気容量を大きくするには半径 c をどのようにすればよいか述べよ．

つぎに，導体球Bのかわりに，図2-2のように導体球殻A内部に点電荷 $q\ (>0)$ を点 $\mathrm{P}(R,0,0)$ $(0<R<a)$ の位置に置いた．はじめに，導体球殻Aを接地した．このとき，導体球殻Aの内側面上に誘導される電荷を以下のように鏡像法を用いて求める．

1-4)　図2-2のように，点 $\mathrm{Q}(R',0,0)$ の位置に鏡像電荷 q' を置くことにより，導体球殻Aの内側の面の電位を一様にゼロの状態にすることができる．この時の R' および q' を，a, R, q を用いて求めよ．

1-5)　導体球殻A上の点 $\mathrm{C}(a,0,0)$ および点 $\mathrm{D}(-a,0,0)$ において誘導される電荷の面密度を求めよ．

1-6)　その後，導体球殻Aに外部電源を接続し，導体球殻Aの内側の面と外側の面の電荷量の和がゼロになるように調整した．このとき，導体球殻Aの外側の面上 (外半径 b の面) の電荷の面密度を求めよ．

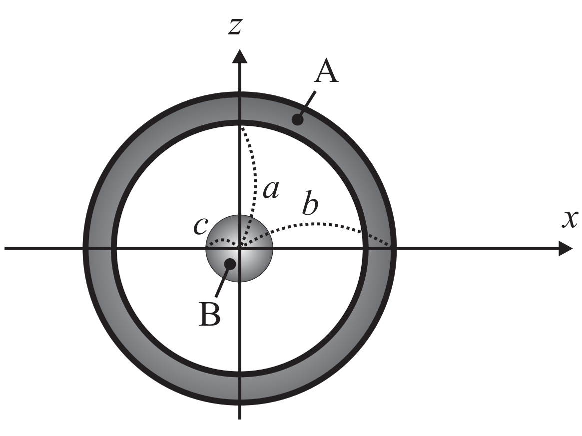

図2-1

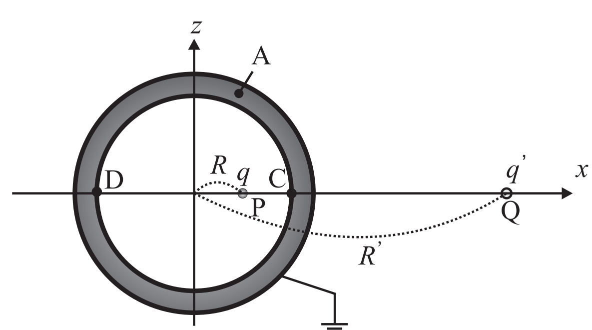

図2-2

問 2　電流によって作られる磁場についての以下の問いに答えよ．

2-1)　図 2-3 に示すように, 無限に長い半径 a の円柱状導線があり, その柱の中心軸が $(x, y, z) = (b, 0, 0)$ の点を通り z 軸に平行に存在する．$b > a$ とする．ここで電流密度 $i(> 0)$ の電流が導線内を一様に z 軸の正の向きに流れる時, xy 平面上の点 $(x, y, 0)$ における磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を導線内と導線外の場合に分けて求めよ．

2-2)　図 2-4 のように無限に長い半径 R の円柱状導線があり，その中心軸が原点を通り z 軸に平行に存在する．その導線内部に，中心軸が $(x, y, z) = (b, 0, 0)$ を通り z 軸に平行に存在する半径 a の円柱状空洞がある．$R > a + b$，$b > a$ とする．ここで電流密度 $i(> 0)$ の電流が z 軸の正の向きに導線内を一様に流れる時，円柱状空洞内の xy 平面上の点 $(x, y, 0)$ における磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ．

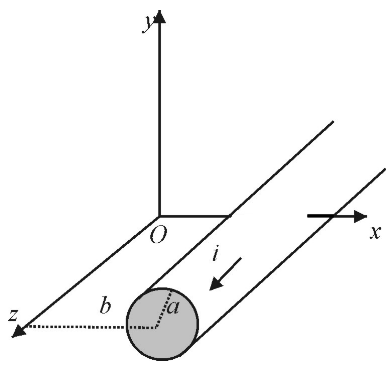

図 2-3

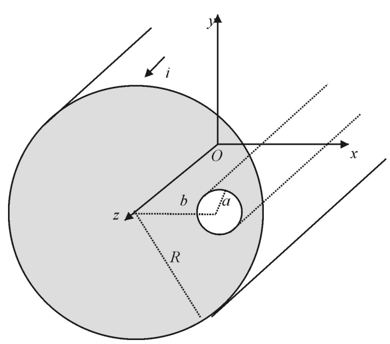

図 2-4