平成 29 年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 II」

[1] 以下の問いに答えよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$，プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とする．解答は，結果だけでなく求め方や計算の過程も示すこと．

問 1　1 次元 x 軸上の領域 $0 \leq x \leq d$ を自由に運動する質量 m の粒子の従うシュレディンガー方程式は次のようになる．

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x).$$

ここで，$\psi(x)$ は固有関数，E はエネルギー固有値である．$V(x)$ はポテンシャルであるが，次で与えられる．

$$V(x)=\begin{cases}\infty & (x<0)\\ 0 & (0\leq x\leq d)\\ \infty & (x>d)\end{cases}$$

ここで，$d>0$ である．このとき，以下の問いに答えよ．

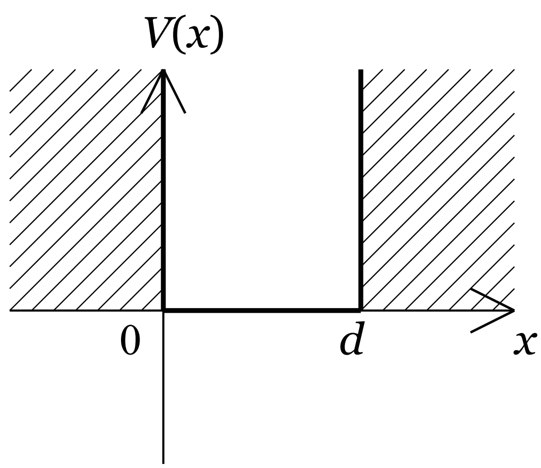

図 1-1

1-1)　基底状態のエネルギー固有値 E_0 および固有関数 $\psi_0(x)$ を求めよ．ただし，固有関数は規格化すること．

1-2)　基底状態の固有関数を用いて，運動量演算子 $\hat{p}=\dfrac{\hbar}{i}\dfrac{d}{dx}$ の期待値 $\langle\hat{p}\rangle$ と分散 $\langle(\hat{p}-\langle\hat{p}\rangle)^2\rangle$ を求めよ．

1-3)　第一励起状態および第二励起状態の固有関数 $\psi_1(x)$ および $\psi_2(x)$ を求めよ．固有関数は規格化すること．また，それぞれの固有関数の節の位置がわかるように，実関数として概形を図示せよ．

問 2　質量 m の粒子がばね定数 k のばねにつながれて 1 次元 x 軸上で単振動をしている．これを量子力学的に扱う．運動量演算子を $\hat{p}$，位置演算子を $\hat{x}$ として，ハミルトニアン $\hat{H}$ は次で与えられる．

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{k\hat{x}^2}{2}.$$

次の新しい演算子 $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ を導入する．

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right), \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right).$$

ここで，ω は角振動数であり，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ である．このとき，以下の問いに答えよ．なお，解答には ω を用いてよい．

2-1)　$\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ の交換関係

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$$

が成り立つことを示せ．

2-2)　$\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$ を用いてハミルトニアンが

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

となることを示せ．

2-3)　$\hat{H}$ と $\hat{a}$，$\hat{H}$ と $\hat{a}^\dagger$ の交換関係

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega\hat{a}, \quad [\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega\hat{a}^\dagger$$

が成り立つことを示せ．

2-4)　$\hat{H}$ の基底固有状態を $|0\rangle$ とし，

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle, \ \langle 0|0\rangle = 1$$

を満たすものとする．n を正の整数として，状態 $|n\rangle$ を次のように定義する．

$$|n\rangle = C(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle.$$

ここで，C は実数の規格化定数である．$|n\rangle$ が $\hat{H}$ の固有状態であることを示せ．また，規格化定数 C を求めよ．

2-5)　z を複素数として，状態 $|z\rangle$ を次のように定義する．

$$|z\rangle = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle.$$

ここで，A は実数の規格化定数である．$|z\rangle$ が $\hat{a}$ の固有状態であることを示し，対応する固有値を求めよ．また，規格化定数 A を求めよ．

平成 29 年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 II」

[2] 以下の問いに解答せよ．答えは，結果だけではなく求め方も必ず示すこと．なおボルツマン定数を k，プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とする．また，絶対温度 T に対し，$\beta = \frac{1}{kT}$ とする．

問 1　互いに区別のできる N 個の独立な量子力学的調和振動子を考える．いずれの調和振動子も固有エネルギーは

$$\epsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

で与えられるものとする．ここで ω は正の実定数，n は 0 以上の整数である．絶対温度 T のカノニカル分布を用いて以下の問いに答えよ．

1-1)　1 つの調和振動子の分配関数を求めよ．

1-2)　N 個の調和振動子のヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ．

1-3)　N 個の調和振動子の内部エネルギー U が次式になることを示せ．（エントロピーが $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ で与えられることを用いるとよい．）

$$U = N\hbar\omega\left(\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} + \frac{1}{2}\right)$$

1-4)　高温の極限（$kT \gg \hbar\omega$）で, 内部エネルギーが $U = NkT$ となることを示せ．

1-5)　高温の極限は古典極限と考えられる．古典力学のエネルギー等分配則からも 1-4) の結果が得られることを示せ．

問 2　絶対温度 T の理想フェルミ気体の粒子数 N とエネルギー E は, 状態密度 $D(\epsilon)$ とフェルミ分布関数 $f(\epsilon)$ を使って次式で表せる．

$$N = \int_0^\infty D(\epsilon)f(\epsilon)d\epsilon, \qquad E = \int_0^\infty \epsilon D(\epsilon)f(\epsilon)d\epsilon$$

ここでフェルミ分布関数は

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}$$

で与えられ，μ は化学ポテンシャルである．状態密度 $D(\epsilon)$ は $\epsilon(\geq 0)$ の α 乗に比例し，

$$D(\epsilon) = \begin{cases} A\epsilon^\alpha & (\alpha > 0) \\ A & (\alpha = 0) \end{cases}$$

で与えられるとして以下の問いに答えよ。なお，A は正の実数であり，フェルミエネルギーは ϵ_{F} と書くことにする．

2-1)　フェルミ分布関数 $f(\epsilon)$ の有限温度における関数形の概形を図示せよ．なお, 横軸（ϵ 軸）には, 原点 0 と μ の目盛りをつけること．

2-2)　絶対零度におけるこのフェルミ気体の一粒子あたりのエネルギー $\frac{E}{N}$ は次のように書けることを示せ．

$$\frac{E}{N} = \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2}\epsilon_{\mathrm{F}}$$

2-3)　$\alpha = 0$ で考える．高温の極限で, フェルミ分布関数 $f(\epsilon)$ はボルツマン分布関数 $e^{-\beta(\epsilon-\mu)}$ に帰着する．この極限で, 化学ポテンシャル μ は T の関数として次式で与えられることを示せ．

$$\mu = kT \log_e \frac{\epsilon_{\mathrm{F}}}{kT}$$