平成30年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「数学」

以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問1　2つの実変数 x および y の関数 $f(x,y)$ の二重積分を考える．

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(x,y) \tag{1}$$

ここで，二次元平面 (x,y) 上の極座標を導入する．

$$x = r\cos\theta \qquad \text{および} \qquad y = r\sin\theta \tag{2}$$

1-1)　新しい座標変数 r および θ の取る値の範囲を示せ．

1-2)　座標変換のヤコビアン J を r および θ を用いて示せ．

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \tag{3}$$

1-3)　式 (1) の積分を次の関数に対して求めよ．

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2} \tag{4}$$

ここで，式 (2) の座標変換と 1-2) の結果を用いること．

1-4)　1-3) の結果を用いて，次の積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} \tag{5}$$

問2　次の偏微分方程式を考える．

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \tag{6}$$

実関数 $p(x,t)$ は，x という空間座標と，t という時間座標の，2つの実変数を持つ．a は正の実数で，実変数は $0 \le x \le L$ $(L > 0)$ と $t \ge 0$ の範囲にある．さらに，次の初期条件

$$p(x,0) = \cos\frac{\pi x}{L} \tag{7}$$

および，次の境界条件を満たすとする．

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}p(x,t)\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial}{\partial x}p(x,t)\right|_{x=L} = 0 \tag{8}$$

2-1)　式 (6) が $p(x,t) = T(t)X(x)$ という形の解を持つと仮定して，左辺が t だけに依存し，右辺が x だけに依存する形の式に分離せよ．そして，式の両辺がある定数に等しいことを示せ．さらに，$T(t)$ と $X(x)$ のそれぞれについての常微分方程式を求めよ．

2-2)　2-1) の結果と初期条件 (7) および境界条件 (8) を用いて，$T(t)$ と $X(x)$ を求めよ．さらに，関数 $p(x,t)$ を決定せよ．

2-3)　2-2) の結果を用いて，次の積分を求めよ．

$$\int_0^{L/2} p(x,t)\, dx \tag{9}$$

平成 30 年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 I」

[1] 以下の問いに答えよ．ただし，重力加速度の大きさを g とする．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問 1　水平でなめらかな床の上に，バネ定数 k の軽いバネの一端が固定され，もう一端に質量 M の小物体 A が取り付けられている．図 1 に示すように，質量 m の小物体 B を速さ v で小物体 A に打ち込んだ．時刻 $t = 0$ で，B は A に合体し，それまで自然長であったバネが縮み始めた．全ての物体は，図に示した x 軸に平行に運動するものとし，$t = 0$ における A の位置を $x = 0$ とする．

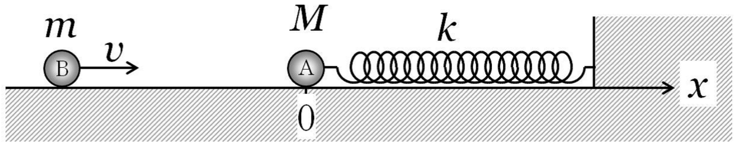

図 1

1-1)　合体した直後の小物体の速さを求めよ．

1-2)　衝突により失われたエネルギー ΔE を求めよ．

1-3)　小物体 B が衝突前に持っていたエネルギーを E_0 とする．$\Delta E/E_0$ を m/M の関数としてグラフに描け．

1-4)　合体した小物体の運動における x の最大値 x_{max} と，そこに初めて到達するまでの時間を求めよ．

問 2　水平から角度 ϕ だけ傾いた斜面がある．この斜面上に，半径 r，質量 M の一様な密度の球を静かに置くと，滑らずに転がり落ちた．球の慣性モーメントを I_{s} とする．図 2 のように x 軸が定義されており，この軸に沿って球が運動する．球の中心の位置を x で，球の回転角を θ で表す．斜面から球の表面に働く摩擦力を F とする．

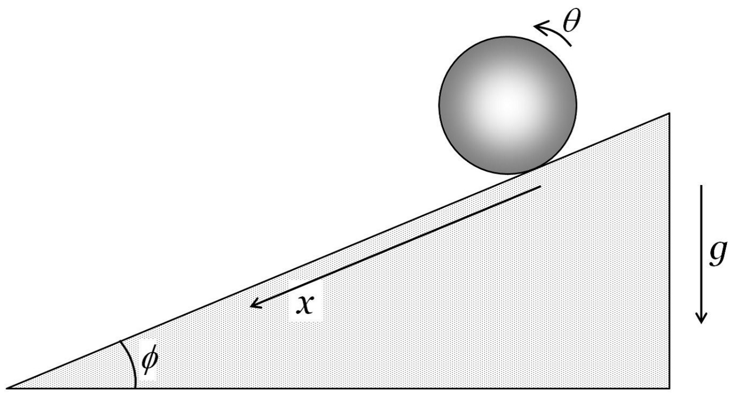

図 2

2-1)　(i) 球の重心の運動を表す運動方程式，(ii) 球の回転を表す運動方程式，(iii) 角加速度 $d^2\theta/dt^2$ と重心の加速度 d^2x/dt^2 の間に成り立つ式をそれぞれ書き表せ．

2-2)　球の重心の x 軸方向の加速度を求め，F を用いずに書き表せ．

2-3)　転がり落ちる際の球の運動エネルギーは，重心の運動に関する部分 E_{G} と，球の回転エネルギー E_{R} の和である．$E_{\mathrm{R}}/E_{\mathrm{G}}$ を求めよ．

次に，球の代りに，半径 r，長さ ℓ，質量 M の一様な密度の円柱を用いて同じ実験を行う．ただし，円柱の回転軸は常に図 2 の紙面に垂直であり，円柱は斜面を滑らずに転がり落ちるものとする．

2-4)　この円柱の回転軸まわりの慣性モーメント I_{c} を積分により求めよ．

2-5)　円柱の重心の x 軸方向の加速度は，球のそれの何倍になるか答えよ．I_{c} を用いて答えてもよい．

平成 30 年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 I」

[2] 以下，真空中を考える．真空の誘電率を ϵ_0，透磁率を μ_0 として以下の問いに答えよ．だたし無限遠方を電位の原点とする．結果だけでなく求め方や計算の過程も示すこと．

問 1　点電荷 q と $-q$ が，それぞれ z 軸上の $z = a\ (>0)$ と $z = -a$ の位置に置かれ，電気双極子を作っている．

1-1)　この電気双極子から離れた点 $\mathrm{A}(x, y, z)$ における電位を答えよ．

1-2)　次に 1-1) で求めた電位について，電気双極子から点 A までの距離が a に比べて充分大きいとし，以下の近似式を用いて点 A における電位を求めよ．

$$(1+t)^\alpha \simeq 1 + \alpha t, \qquad \text{ただし } |t| \ll 1 \text{ かつ } \alpha \text{ は実数.}$$

1-3)　点 A における電場ベクトルの各成分を，電気双極子モーメント $p\ (= 2aq)$ を用いて答えよ．

1-4)　点電荷 $-q$ の代わりに，$z \leq 0$ の領域全てを導体で埋めつくした．真空側の導体表面 $(z = 0)$ における電場と，導体表面に誘起される電荷の表面密度を求めよ．

問 2　原点を中心とした半径 a の円形コイルがある．このコイルは xy 面内にあり，z 軸上の正の位置から見たときに，反時計回りに電流 I が流れている．

2-1)　コイル上の点（$a\cos\varphi,\ a\sin\varphi,\ 0$）（ただし　$0 \leq \varphi < 2\pi$）における電流素片 $Iad\varphi$ が，点 $(0, 0, h)$ につくる磁束密度について，z 軸方向およびそれに垂直な方向の大きさ B_z，B_r をそれぞれ求めよ．

2-2)　原点から距離 h にある z 軸上の点に，この円形コイル全体がつくる磁束密度の大きさと向きを答えよ．

つぎに，円形コイルを取り除き，かわりに原点に大きさ p_m の磁気双極子モーメントを持つ磁極対を置いた．この磁気双極子モーメントの向きは z 軸の正の向きとなるように磁極対を固定した．

2-3)　原点から距離 R にある z 軸上の点を点 C とする．原点に置かれた磁気双極子が点 C につくる磁束密度の大きさと，2-2) で考えた円電流が点 C に作る磁束密度の大きさが同じであるとしたとき，電流 I と磁気双極子モーメント p_m との関係を示す式を求めよ．ただし R は磁気双極子の正負の磁極間の距離及び 2-2) で考えた円形コイルの半径 a より充分大きいとする．必要があれば問 1 の解答結果を引用してもよい．

2-4)　xz 面内における磁力線の概形を，円形コイルの場合と磁極対の場合についてそれぞれ描け．原点付近の様子も分かるように注意すること．