平成30年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 II」

[1] 以下の問いに答えよ．ただし，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$，h をプランク定数とする．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問1　1次元の領域 $0 \leq x \leq L$ を自由に動く質量 m の粒子のハミルトニアンは p を運動量として次のように書ける：

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ 0 & (0 \leq x \leq L) \\ \infty & (x > L) \end{cases}$$

1-1)　シュレディンガー方程式 $H\psi(x) = E\psi(x)$ を解いて，基底状態のエネルギー固有値 E_1 と固有関数 $\psi_1(x)$ を求めよ．

1-2)　粒子の x 座標 x に対し，基底状態における x の期待値 $\langle x \rangle$ と分散 $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ を求めよ．必要ならば以下の不定積分を用いよ：

$$\int y \sin^2 y \, dy = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y \sin 2y - \frac{1}{8}\cos 2y$$

$$\int y^2 \sin^2 y \, dy = \frac{1}{6}y^3 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}y^2\right)\sin 2y - \frac{1}{4}y \cos 2y$$

1-3)　基底状態は不確定性関係 $\Delta x \Delta p \simeq \hbar$ をほぼ満たすことが知られている．このことからエネルギー固有値 E_1 のおおよその大きさを求めよ．

問2　スピン $\frac{1}{2}$ の角運動量演算子 $\vec{S} = \frac{1}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ で表される内部自由度を持つ粒子を考えよう．ここで，σ_a $(a = x, y, z)$ は 2×2 のパウリ行列を意味し，

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である．スピンに付随する磁気モーメントが $-\mu \vec{S}$ と表されれば，一様磁場 $\vec{B} = (0, 0, B)$ 中におけるスピン自由度のハミルトニアンは次のように書ける：

$$H = \frac{1}{2}\mu B \sigma_z$$

2-1)　ハミルトニアン H の固有値を求めよ．

2-2)　スピンの波動関数を $\chi(t) = \begin{pmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \end{pmatrix}$ と表す．この波動関数の時間発展はシュレディンガー方程式 $i\hbar \dfrac{\partial \chi(t)}{\partial t} = H\chi(t)$ で与えられる．時刻 $t = 0$ において

$$\chi_1(t = 0) = \chi_2(t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるとし，$t > 0$ における $\chi_1(t)$，$\chi_2(t)$ を求めよ．

2-3)　前問のスピン状態 $\chi(t)$ における期待値 $(\langle \sigma_x \rangle, \langle \sigma_y \rangle, \langle \sigma_z \rangle)$ を求め，磁場中でのスピンの運動を述べよ．

平成 30 年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 II」

[2] 以下の問いに答えよ．ただし，ボルツマン定数を k_{B} とし，プランク定数を h とする．また，絶対温度を T とし，$\beta = (k_{\mathrm{B}}T)^{-1}$ とする．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問 1　3 つの量子状態をもつ 1 粒子を考える．状態 1 のエネルギーは 0, 状態 2 と状態 3 のエネルギーは $\Delta(>0)$ とする．

1-1)　この粒子に対する分配関数を求めよ．

1-2)　この系のエネルギーの平均値を求めよ．

1-3)　温度が十分高く，$k_{\mathrm{B}}T \gg \Delta$ の条件をみたすとき，この系の内部エネルギーに対する近似式は定数 A，B を用いて，次のように与えられる．

$$E = \Delta\,(A - B\Delta\beta)$$

このとき，A および B の値を求めよ．

問 2　1 粒子のエネルギー E が以下で与えられる 1 次元の系を考える．

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

m は質量，x は座標，v は粒子速度，$V(x)$ はポテンシャルエネルギーである．
このとき，分配関数 Z は以下の式で与えられる．

$$Z = \frac{m}{h}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dv \exp(-\beta E)$$

2-1)　$V(x)$ が次の式で与えられるとき，分配関数 Z を具体的に求めよ．必要であれば，積分公式：$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\pi/\alpha}$（$\alpha$ は正の実数）を用いよ．

$$V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} \quad (\omega \text{ は実数}) \tag{1}$$

2-2)　$V(x)$ が式 (1) で与えられるとき，内部エネルギーの平均値を求めよ．

2-3)　$V(x)$ が次の式で与えられるとき，分配関数 Z を具体的に求めよ．また，そのときの内部エネルギーの平均値を求めよ．

$$V(x) = \begin{cases} ax & (x \geq 0,\ a \text{ は正の実数}) \\ \infty & (x < 0) \end{cases}$$

2-4)　$V(x)$ が次の式で与えられるとき，内部エネルギーの平均値を求めよ．積分公式：$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^4}dx = \frac{1}{2}\alpha^{-1/4}\Gamma(1/4)$ を用いよ．ただし，$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\exp(-t)dt$ であり，$\Gamma(z)$ は α に依存しない定数である．

$$V(x) = bx^4 \ (b \text{ は正の実数})$$

2-5)　$V(x) = cx^{2n}$（c は正の実数，n は正の整数）のとき，内部エネルギーを求めよ．（ヒント：$\Gamma(1/n)$ を用いよ．）