2019 年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「数学」

以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問 1　以下の行列の固有値をすべて求めよ．

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

問 2　以下で与えられるスカラー関数 $f(\vec{r})$，およびベクトル関数 $\vec{v}(\vec{r})$ を考える．

$$f(\vec{r}) = \log|\vec{r}|, \qquad \vec{v}(\vec{r}) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$$

ここで，$\vec{r}$ は 3 次元直交座標系における位置ベクトル，すなわち $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ である．また，$\vec{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dfrac{\partial}{\partial x_3}\right)$ とする．

2-1)　スカラー関数 $f(\vec{r})$ に対し，以下を計算せよ．ただし，得られた結果は $\vec{r}$ および $r = |\vec{r}|$ のみを用いて表すこと．

$$\vec{\nabla} f, \qquad \Delta f = \vec{\nabla}^2 f$$

2-2)　ベクトル関数 $\vec{v}(\vec{r})$ に対し，以下を計算せよ．

$$\vec{\nabla} \times \vec{v}$$

2-3)　定数ベクトル $\vec{c} = (0, -1, 1)$ に対し，以下を計算せよ．

$$\vec{c} \times \vec{v}, \qquad \vec{\nabla} \times (\vec{c} \times \vec{v})$$

問 3　区間 $-1 \le x \le 1$ において関数 x^2 のフーリエ級数

$$x^2 = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\pi x) \tag{1}$$

を考える．

3-1)　以下の積分を計算せよ．

$$\int_{-1}^{1} \cos(n\pi x)\cos(m\pi x)dx$$

ここで，m, n は $m > 0, n > 0$ を満たす整数とする．

3-2)　上記の結果を用いてフーリエ級数 (1) の係数 c_n をすべて求めよ．

2019 年度年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 I」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．万有引力定数を G とし，摩擦はないものとする．

問 1　図 1-1 のように半径 R, 質量 M で密度が一様な球体が静止している．この球体に中心を通る細い穴をあけ，球面上側を点 P, 球面下側を点 Q とする．球体の中心を原点として OP を正の方向とする位置座標 z を定義する．以下では，２つの場合について質点の運動を考えるが，いずれの場合も質点に働く力は球体から受ける万有引力以外は考えないものとする．

まず，z 軸上を運動する質量 m $(m \ll M)$ の質点を考える．

1-1)　位置 z にある質点にはたらく万有引力の z 成分 $F(z)$ を，$z \geq R$ の場合について z の関数として求めよ．

1-2)　$F(z)$ は $-R < z < R$ の場合には $F(z) = -\dfrac{GM}{R^3}mz$ となる．この式を導出せよ．

1-3)　球体の万有引力のポテンシャル $\phi(z)$ を求め，$-4R \leq z \leq 4R$ の範囲でグラフに図示せよ．ただし，$z \to \infty$ で $\phi(z) \to 0$ として，$z = 0, z = \pm R, z = \pm 4R$ における値をわかるようにすること．

1-4)　点 P からこの質点を初速度 0 で放したところ，質点は z 軸に沿って運動した．質点が中心に達したときの速度の大きさを求めよ．

1-5)　1-4) において，質点を点 P で放してから最初に点 P に戻ってくるまでの時間を求めよ．

つぎに，質量 m $(m \ll M)$ の質点を，点 P から z 軸に対して垂直方向に初速度を与えて射出した場合について考える．

1-6)　ある初速度 v_0 (第一宇宙速度) のとき，質点は球の表面に沿って運動し，点 Q を通過して点 P に戻ってきた．v_0 を求めよ．

1-7)　初速度 bv_0 $(b > 1)$ のときに，質点が再び点 P に戻ってくるための b の条件を求めよ．

1-8)　1-7) の場合に，質点が $z < 0$ において z 軸を横切るときの球の中心からの距離を求めよ．

1-9)　$T_0 \equiv \left(\dfrac{2\pi R}{v_0}\right)$ とおく．1-7) の場合に，質点が再び点 P に戻ってくるまでの時間を b, T_0 を用いて表わせ．なお，ケプラーの第 3 法則 (公転周期の 2 乗は軌道長半径の 3 乗に比例する) を用いてよい．

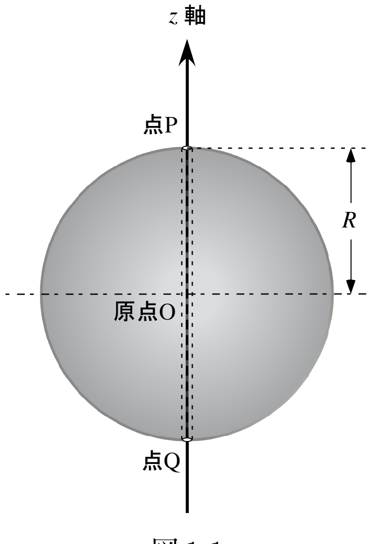

図 1-1

2019年度年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学I」

[2] 図2-1のような半径aの導体円柱と，半径b ($> a$) の導体円筒からなる無限に長い同軸ケーブルを考える．導体円筒の厚さは無視できるものとして，以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．ただし，同軸ケーブルは真空中にあり，真空の誘電率をϵ_0，真空の透磁率をμ_0，導体円柱の透磁率をμとする．

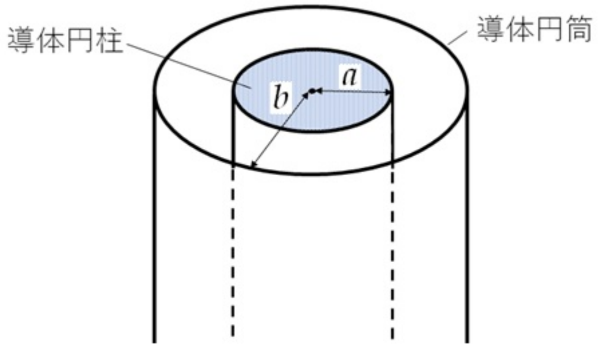

図2-1

問1　導体円柱の表面に軸方向単位長さあたりρ (> 0)の電荷が一様に分布し，導体円筒に軸方向単位長さあたり$-\rho$の負電荷が一様に分布している場合について考える．

1-1)　導体円柱の中心軸からの距離をrとして静電場の大きさ$E(r)$を求めよ．ただし，$r < a$，$a \leq r \leq b$，$b < r$の領域に分けること．

1-2)　導体円柱表面 $(r = a)$ と導体円筒 $(r = b)$ の電位差を求めよ．

1-3)　同軸ケーブルの軸方向単位長さあたりの静電容量を求めよ．

問2　導体円柱には軸方向上向きに大きさIの電流が流れており，導体円筒には軸方向下向きに大きさIの電流が流れている場合について考える．ただし，導体円柱の電流は円柱内を一様に流れているものとする．

2-1)　導体円柱の中心軸からの距離をrとして磁束密度$B(r)$の大きさを求めよ．ただし，$r < a$，$a \leq r \leq b$，$b < r$の領域に分けること．

2-2)　2-1)で求めた磁束密度$B(r)$のグラフを横軸rとして示せ．ただし，$\mu > \mu_0$である．

2-3)　$r < a$と$a \leq r \leq b$のそれぞれの領域において，軸方向に単位長さをもつ面を貫く磁束Φを求めよ．

2-4)　同軸ケーブルの軸方向単位長さあたりの自己インダクタンスLを求めよ．