2019年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 II」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．プランク定数を h, $\hbar \equiv \dfrac{h}{2\pi}$ とする．

問 1　式 (1) で表される一次元ポテンシャルに束縛された，質量 m，エネルギー E の粒子の定常状態を考える ($0 < E < V_0$).

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & (x \leq 0) \\ 0 & (0 < x < a) \\ V_0 & (x \geq a) \end{cases} \tag{1}$$

粒子の固有関数を $\psi(x)$ として，

1-1) $x \to \mp\infty$ において満たすべき境界条件から $\left|\dfrac{d\log\psi}{dx}\right|$ を求めよ．

1-2) $X \equiv \left|\dfrac{d\log\psi}{dx}\right|^{-1}$ とするとき，V_0 依存性に言及して X の物理的意味を述べよ．

$V_0 \to \infty$ のとき，

1-3) 規格化された固有関数を全て求めよ．

1-4) エネルギー固有値を全て求めよ．

1-5) 基底状態のエネルギーを不確定性関係から導け．

問 2　角運動量演算子 $\boldsymbol{l}$ を位置演算子 $\boldsymbol{r}$ と運動量演算子 $\boldsymbol{p}$ によって $\hbar\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ と定義し，xyz 直交座標における $\boldsymbol{l}$ の成分を (l_x, l_y, l_z) とする．また，$\boldsymbol{l}^2, l_z$ を同時対角化し，演算子 $l_+ \equiv l_x + il_y$, $l_- \equiv l_x - il_y$ を定義する．

2-1) l_x^2 と l_z との交換関係を l_x と l_y で表せ．

2-2) $z = r\cos\theta$ で表される $r\theta\varphi$ 球座標において，固有方程式 $l_z\psi_m = m\psi_m$ に対する $|m| < 2$ を満たす固有値すべて，およびそれらに対応する固有関数を求めよ．

2-3) m を正の固有値として $l_z\psi_m = m\psi_m$ を満たす固有関数 ψ_m があるとき，固有関数 $l_-\psi_m$ に対応する l_z の固有値を求めよ．

2019年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学II」

[2] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．ただし，ボルツマン定数を $k_{\rm B}$ とする．

問1 気体について考える．定積熱容量 C_V と定圧熱容量 C_p の間には $C_V - C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ の関係がある．ここで，S はエントロピー，p は圧力，T は絶対温度，V は体積である．

1-1) マクスウェルの関係式を用いて，$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$ および $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$ を $\frac{\partial}{\partial T}$ を用いた表式で表せ．

1-2) 体積 $V = V(p,T)$ とかけるとき，体積一定の過程を考えると $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\frac{1}{X}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ と表すことができる．X を $\frac{\partial}{\partial p}$ を用いた表式で表せ．

1-3) 等圧膨張率 $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ と等温圧縮率 $\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ を用いて，$C_V - C_p = -TV\frac{\alpha^2}{\kappa}$ と表せることを示せ．

1-4) 高温低圧での実在気体の状態方程式は，

$$pV \simeq Nk_{\rm B}T + N\left(b - \frac{a}{k_{\rm B}T}\right)p,$$

と近似することができる．ここで，N は粒子数，a, b は p, V, T に依存しない定数である．この状態方程式を用いて $C_V - C_p$ を $\frac{pa}{(k_{\rm B}T)^2}$ の一次までの範囲で求めよ．

問2 N 個の二準位系を絶対温度 T のカノニカル分布を用いて考える．2つの状態A，Bのエネルギーをそれぞれ $\epsilon_{\rm A}$，$\epsilon_{\rm B}$ とし，$\epsilon_{\rm A} < \epsilon_{\rm B}$ とする．また，N 個は互いに区別できるものとする．

2-1) 分配関数を求めよ．

2-2) 状態Aの占有率の平均値を求めよ．

2-3) エネルギーの平均値を求め，T の関数として図示せよ．

2-4) $k_{\rm B}T \ll \epsilon_{\rm B} - \epsilon_{\rm A}$ のとき，熱容量 C は $C \simeq k_{\rm B}c_1 \exp\left(-\frac{c_2}{k_{\rm B}T}\right)$ と近似できる．c_1 と c_2 を求めよ．