2020年度

東京都立大学 大学院理学研究科
(現 首都大学東京 大学院理学研究科)

物理学専攻博士前期課程夏季入学試験問題

数学・物理学 I (135分)

2019年8月27日 (火)
9:30 〜 11:45

注意 問題 (数学, 物理学 I [1], 物理学 I [2]) ごとに答案用紙各1枚を使用し，解答は1題について1枚の答案用紙の表裏に収めよ．たとえ白紙であっても，必ず3題分の答案用紙に受験番号と氏名を記入して提出すること．また，問題は各自持ち帰り，計算用紙は全て提出すること．

2020 年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「数学」

以下の問いに答えよ．結果だけではなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問 1　以下の行列 M および U を考える．

$$M = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ここで，α はパラメータとする．

1-1)　行列 M の固有値 $\lambda_1 > \lambda_2$ を求めよ．

1-2)　以下のように，行列 M を対角化するような行列 U のパラメータ α を求めよ．

$$U^{-1}MU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

問 2 2-1)　以下の $y_0(x)$ に対する斉次微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{dy_0}{dx} - 2y_0 = 0$$

2-2)　以下の $y_1(x)$ に対する非斉次微分方程式を考える．

$$\frac{dy_1}{dx} - 2y_1 = e^{2x} \tag{1}$$

$y_1(x) = u(x)y_0(x)$ としたとき，$u(x)$ が満たす微分方程式を導き，その一般解 $u(x)$ を求めよ．ここで，$y_0(x)$ は 2-1) で求めた解とする．このことにより，非斉次微分方程式 (1) の一般解 $y_1(x)$ を求めよ．

2-3)　以下の $y_2(x)$ に対する非斉次微分方程式を考える．

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} - 4\frac{dy_2}{dx} + 4y_2 = e^{2x}$$

$w(x) = \dfrac{dy_2}{dx} - 2y_2$ としたとき，$w(x)$ が満たす微分方程式を導け．

2-4)　以下の $y(x)$ に対する非斉次微分方程式を考える．

$$\frac{dy}{dx} - 2y = y_1(x) \tag{2}$$

$y(x) = v(x)y_0(x)$ としたとき，$v(x)$ が満たす微分方程式を導き，その一般解 $v(x)$ を求めよ．ここで，$y_0(x)$ は 2-1) で求めた解，また，$y_1(x)$ は 2-2) で求めた解とする．このことにより，非斉次微分方程式 (2) の一般解 $y(x)$ を求めよ．

問 3　以下の不定積分を実行せよ．

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

ヒント：変数変換 $u = \tan\dfrac{x}{2}$ を行ってもよい．

2020 年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 I」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．重力加速度を g とする．

問 1　静止した質量 m の質点が，時刻 $t=0$ で落下し始めた．図 1-1 に示すように，鉛直下方を向いた z 軸の座標を用いて質点の位置を表し，$t=0$ の位置を $z=0$ とする．質点には，重力 mg と速度 v に比例する抵抗力 $-bv$（ただし，b は正の定数）がはたらく．

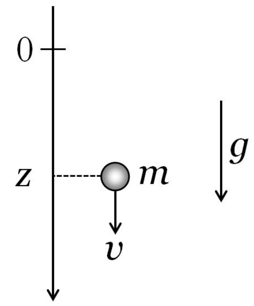

図 1-1

1-1)　質点の運動方程式を，速度 v を用いて書き表しなさい．

1-2)　質点の速度 $v(t)$ を求めなさい．

1-3)　縦軸を v，横軸を t にとって，$v(t)$ の概略図を描きなさい．なお，それぞれの軸に，終端速度や，特徴的な時間を記入すること．特徴的な時間については，ふさわしいものを自分で定義してよい．

1-4)　時刻 t における質点の位置 $z(t)$ を求めなさい．

1-5)　時刻 t までに抵抗力がした仕事を書き表しなさい．ただし，$v(t)$ や $z(t)$ を用いてもよい．

問 2　図 1-2 に示すように，2 つの単振り子が天井に取り付けられている．質量 m の 2 つのおもりは，それぞれ長さ l の軽い糸で天井からつるされ，ばね定数 k の軽いバネで結ばれている．2 つのおもりに対して，それぞれの静止した位置からの変位を x_1，x_2 とする．2 つのおもりは，$|x_1| \ll l$ および $|x_2| \ll l$ を満たしながら，紙面内を微小運動するものとする．支点間の距離 a は，ばねの自然長と等しく，2 つのおもりが静止した状態では，2 本の糸は鉛直で互いに平行となる．

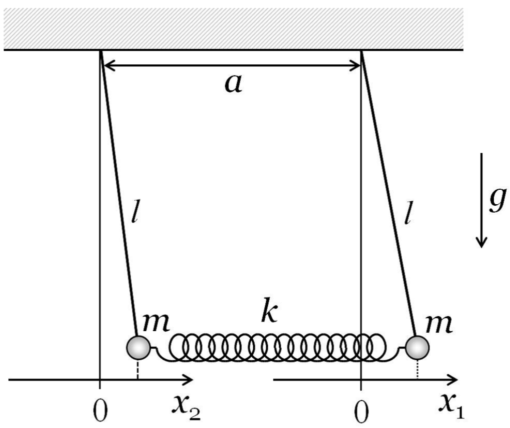

図 1-2

2-1)　２つのおもりの運動方程式を整理すると，以下の形に書き表わすことができるものとする．

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ \ddot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \end{cases}$$

$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ を，m, k, l, g を用いて書き表せ．

以下では，$A_{11} = -5, A_{12} = 3, A_{21} = 3, A_{22} = -5$ と書き表せる場合を考える．

2-2)　x_1 と x_2 が同一の角振動数で単振動する運動を基準振動（固有振動）と呼ぶ．２つの基準振動の角振動数 ω_1 と ω_2 を求めよ．ただし，$\omega_1 \leq \omega_2$ とする．

2-3)　２つのおもりの重心位置と相対位置に着目して，それぞれの基準振動の特徴を述べよ．

2-4)　２つのおもりが $x_1(0) = c$（ただし，c は実定数），$x_2(0) = 0$，$\dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$ の初期条件で運動し始めた．$x_2(t)$ を求めよ．

2020 年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 I」

[2] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく, 求め方や計算の過程も示すこと．真空の誘電率を ϵ_0, 真空の透磁率を μ_0 とする

問 1　真空中にある電荷密度 ρ で一様に満たされた半径 a の球を考える. 球の中心からの距離を r, 無限遠における電位を 0 とする. 球内外の誘電率は ϵ_0 に等しいものとする.

1-1) 球の外側 $r(> a)$ の位置での電位を求めよ.

1-2) 球の内側 $r(< a)$ の位置での電位を求めよ.

問 2　図 2-1 に示すように, 真空中に無限に長い円柱の導体がある．円柱の半径を a とし, 円柱の中心軸の向きは z 軸に平行とする. z 軸からの距離を r とする. 導体内外の透磁率は μ_0 に等しいものとする.

2-1) 円柱の表面のみに大きさ I で $+z$ 向きの電流を流した時の磁束密度の大きさを $r < a$, $r > a$ で場合分けして，r の関数として求めよ.

2-2) 円柱の内部に大きさ I で $+z$ 向きの電流を流した時の磁束密度の大きさを $r < a$，$r > a$ で場合分けして，r の関数として求めよ. 電流密度は円柱内部で一様とする.

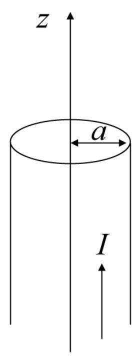

図 2-1

問 3　真空中にある半径 a, b $(a < b)$ の同心の球殻の導体を考える．２つの球殻は互いに絶縁されているものとする．電荷 Q を内側の球殻に, 電荷 $-Q$ を外側の球殻に与えた. 同心球の中心からの距離を r とする.

3-1) 電場の大きさを $r < a$，$a < r < b$，$r > b$ で場合分けして，r の関数として求めよ.

3-2) このコンデンサーの静電容量を求めよ.

2020年度

東京都立大学 大学院理学研究科
(現 首都大学東京 大学院理学研究科)

物理学専攻博士前期課程夏季入学試験問題

物理学 II (100分)

2019年8月27日(火)
13:00 〜 14:40

注意 問題 (物理学 II [1], 物理学 II [2]) ごとに答案用紙各1枚を使用し，解答は1題について1枚の答案用紙の表裏に収めよ．たとえ白紙であっても，必ず2題分の答案用紙に受験番号と氏名を記入して提出すること．また，問題は各自持ち帰り，計算用紙は全て提出すること．

2020 年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 II」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．h をプランク定数，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ とする．

問 1 振動子の質量を m，運動量演算子を $\hat{p}$，位置演算子を $\hat{x}$, 角振動数を ω として，ハミルトニアン $\hat{H}$ が

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

の形に書ける量子論的な 1 次元調和振動子を考える．また，演算子

$$\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right), \quad \hat{a}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$

および $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$ を定義する．

1-1) $\hat{p}$ と $\hat{x}$ の交換関係を用いて交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を示せ．

1-2) $\hat{p}$ と $\hat{x}$ を $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を用いて書き表せ．また，$\hat{H}$ を $\hat{N}$ を用いて書き換えよ．

1-3) 演算子 $\hat{N}$ の固有値は負にならないことを示せ．

1-4) 交換関係 $[\hat{N}, \hat{a}]$ を計算せよ．

1-5) 上の問いから $\hat{a}$ がどのような演算子か考えて，基底状態の波動関数を $\psi_0(x)$ とするとき $\hat{a}\psi_0(x)$ が満たすべき方程式を示せ．また，これを解いて $\psi_0(x)$ を求めよ．規格化しなくてよい．

1-6) 基底状態における存在確率 $|\psi_0(x)|^2$ の概略を図示し，存在確率が最大になる位置を答えよ．また，比較として，振幅 A の x 軸上の古典論的 1 次元調和振動子を考え，存在確率が最大になる位置を答えよ．

問 2 電子のスピン演算子 $\hat{\boldsymbol{s}}$ の z 成分を対角化し，$\hat{\boldsymbol{s}}^2$ と $\hat{s}_z$ の同時固有状態を

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\beta\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で表す．$\hat{\boldsymbol{s}} = \dfrac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ と書かれるパウリのスピン行列 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ は

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で表される．また，演算子 $\hat{s}_\pm \equiv \hat{s}_x \pm i\hat{s}_y$ (複号同順) を定義する．

2-1) $\hat{s}_\pm$ を行列表現せよ．また，$\hat{s}_+\,|\alpha\rangle$ および $\hat{s}_-\,|\alpha\rangle$ を計算せよ．

2-2) $|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta|$ を計算せよ．

2020 年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 II」

[2] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく, 求め方や計算の過程も示すこと．ただし, k_{B} をボルツマン定数，h をプランク定数, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ とする．

問 1 次式で与えられる固有エネルギーを持つ量子論的 1 次元調和振動子を考える．

$$\epsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

ここで n は 0 以上の整数である。温度 T のカノニカル分布を仮定して以下の問いに答えよ．

1-1) この調和振動子の分配関数 Z が次式で与えられることを示せ．

$$Z = \frac{e^{-\hbar\omega/2k_{\mathrm{B}}T}}{1 - e^{-\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T}}$$

1-2) この調和振動子のヘルムホルツの自由エネルギーが次式で表されることを示せ．

$$F = \frac{1}{2}\hbar\omega + k_{\mathrm{B}}T\ln\{1 - \exp(-\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T)\}$$

1-3) エントロピーと自由エネルギーの関係を用いて, 内部エネルギー U が次式になることを示せ．

$$U = \hbar\omega\left[\frac{1}{e^{\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T} - 1} + \frac{1}{2}\right]$$

1-4) 高温の極限 (古典的調和振動子) での内部エネルギーを求め, さらにそれがエネルギー等分配則を満たしていることを説明せよ．

問 2　N 個の電子を理想フェルミ気体として考える．各電子はスピン自由度を持っており, エネルギー ϵ における 1 スピン自由度あたりの状態密度 $D(\epsilon)$ は

$$D(\epsilon) = \begin{cases} A\epsilon^{1/2} & (\epsilon \geq 0) \\ 0 & (\epsilon < 0) \end{cases}$$

で与えられるものとする．ここで A は正の実定数である．

2-1) フェルミ分布関数 $f(\epsilon)$ の絶対零度と有限温度における関数形を横軸を ϵ にとって大まかに描け．ただし, 縦軸には 0 と 1 の目盛りを書くこと．

2-2) 絶対零度における電子系のフェルミエネルギー ϵ_{F} を求めよ．

2-3) 絶対零度における電子系の全エネルギーを E とする．1 電子あたりの平均エネルギー E/N を ϵ_{F} を用いて表せ．