

2020 年度

東京都立大学 大学院理学研究科  
(現 首都大学東京 大学院理学研究科)

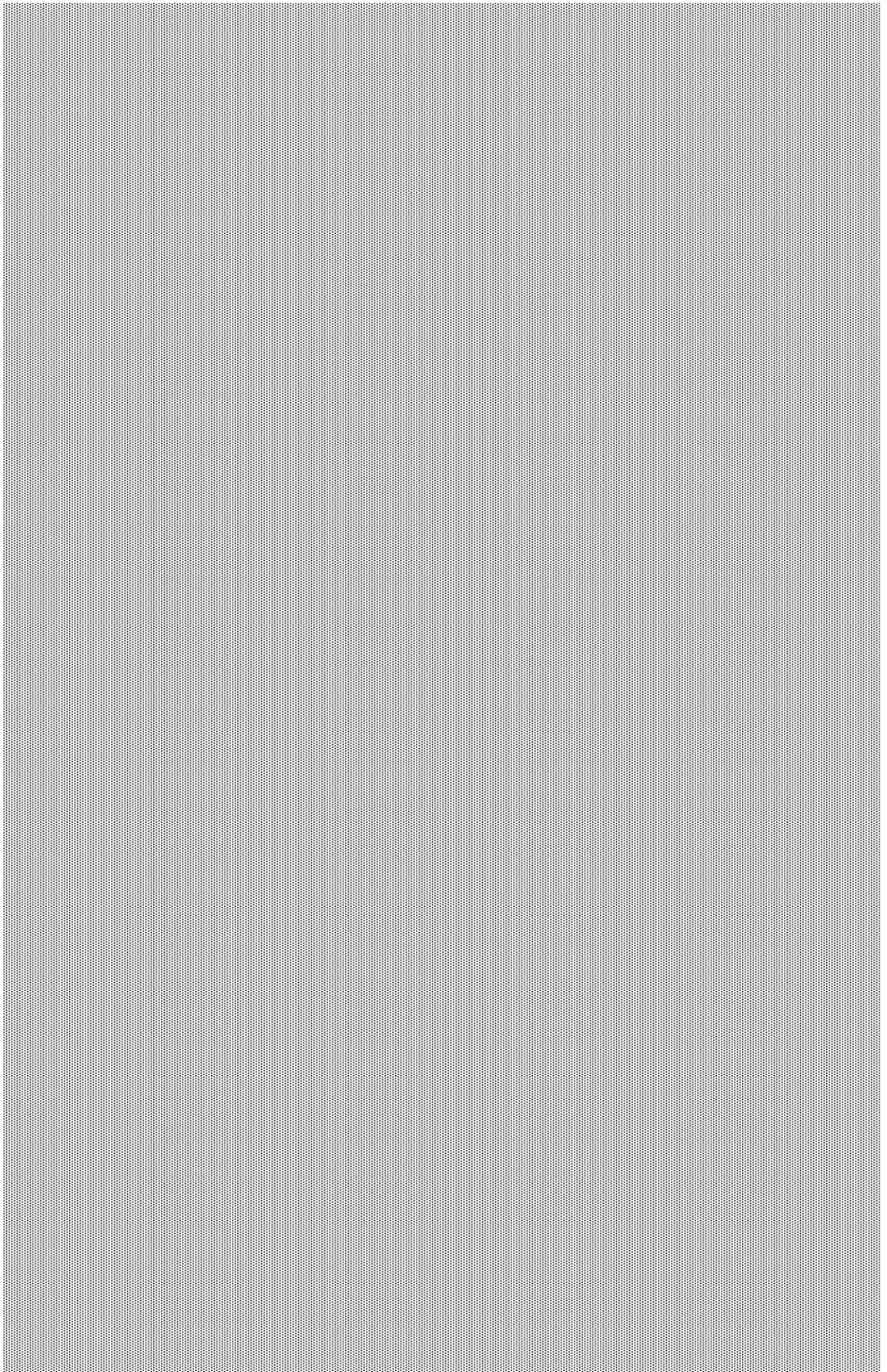
物理学専攻博士前期課程冬季入学試験問題

数学・物理学 I (70 分)

2020 年 2 月 6 日 (木)

9:30 ~ 10:40

**注意** 問題 (数学, 物理学 I [1], 物理学 I [2]) ごとに答案用紙各 1 枚を使用し, 解答は 1 題について 1 枚の答案用紙の表裏に収めよ. たとえ白紙であっても, 必ず 3 題分の答案用紙に受験番号と氏名を記入して提出すること. また, 計算用紙は全て提出すること.





## 2020年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「数学」

以下の問いに答えよ。結果だけでなく、求め方や計算の過程も示すこと。

問1  $\cos \theta$  を複素数  $z = e^{i\theta}$  を用いて表せ。ただし、 $z$  の複素共役  $z^*$  を用いてはならない。

問2 問1の結果を用いて、以下の積分を  $z$  に対する積分の形に書き直せ。

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i5\theta}}{2 - \cos \theta} d\theta$$

さらに、被積分関数の  $z$  平面上にあるすべての極を求めよ。

問3 問2の結果、ならびに留数定理を用いて以下の積分を計算せよ。

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 5\theta}{2 - \cos \theta} d\theta$$

## 2020 年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 I」

[1] 以下の問いに答えよ。結果だけでなく、求め方や計算の過程も示すこと。重力加速度を  $g$  とする。

ばね定数  $k$  のバネでつるされた質量  $M$  の球がある。鉛直下方を向いた  $x$  軸の座標を用いて球の位置を表し、平衡状態の球の位置を  $x = 0$  とする。球には速度に比例する抵抗  $-\alpha \frac{dx}{dt}$  ( $\alpha > 0$ ) がはたらく。

問1 球の運動方程式を書き表せ。

問2 問1の運動方程式を解いて、 $\alpha = \sqrt{Mk}$  のときの一般解を求めよ。

この装置を、 $\alpha$  の値が不明な液体に入れた。ただし、以下では球にはたらく浮力は考えない。

問3 時刻  $t = 0$  のとき、 $x > 0$  のある位置で球から手をはなしたところ、球は  $x < 0$  の領域に入ることなく、 $x = 0$  の位置に漸近した。 $\alpha$  の値の条件を求めよ。

問4 問3の条件を満たす液体中において、時刻  $t = 0$  のとき、 $x = 0$  から正の初速度で球を打ち出した。その後の  $x$  および  $\frac{dx}{dt}$  のそれぞれの時間依存性の概略をグラフに描け。ただし、運動方程式を解く必要はない。

## 2020年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 I」

[2] 以下の問いに答えよ。ただし、真空の誘電率を  $\epsilon_0$ 、真空の透磁率を  $\mu_0$  とする。結果だけでなく、求め方や計算の過程も示すこと。

問1  $xy$  平面内において、位置  $(a, 0)$  に点電荷  $Q$ 、位置  $(0, b)$  に点電荷  $q$  を置く。  $a > 0$ 、 $b > 0$  とする。点電荷  $q$  に働く力の  $xy$  成分  $F_x$ 、 $F_y$  を求めよ。

問2 無限に広い  $xy$  平面に電荷密度  $\sigma (> 0)$  で電荷が一様に分布しているとき、位置  $(0, 0, d)$  における電場の  $xyz$  成分  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $E_z$  を求めよ。  $d > 0$  とする。

問3  $z$  軸に平行な導線が2本あり、それぞれ点  $(a, 0, 0)$  および点  $(-a, 0, 0)$  を通っている。ただし、 $a > 0$  である。両方の導線に同じ方向の電流  $I$  が流れているとき、導線の単位長さ当たりにかかる力の大きさを求めよ。また、力の向きについて引き合うか反発するかを答えよ。

問4 電荷  $Q_0$  で充電した容量  $C$  のコンデンサーに、図 2-1 のように時刻  $t = 0$  に抵抗  $R$  でコンデンサーの両端を連結した。抵抗を流れる電流の時間変化を時刻  $t$  の関数として求めよ。

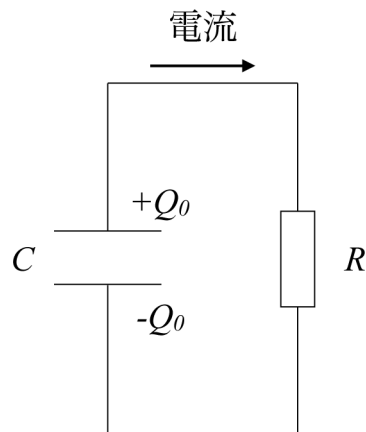
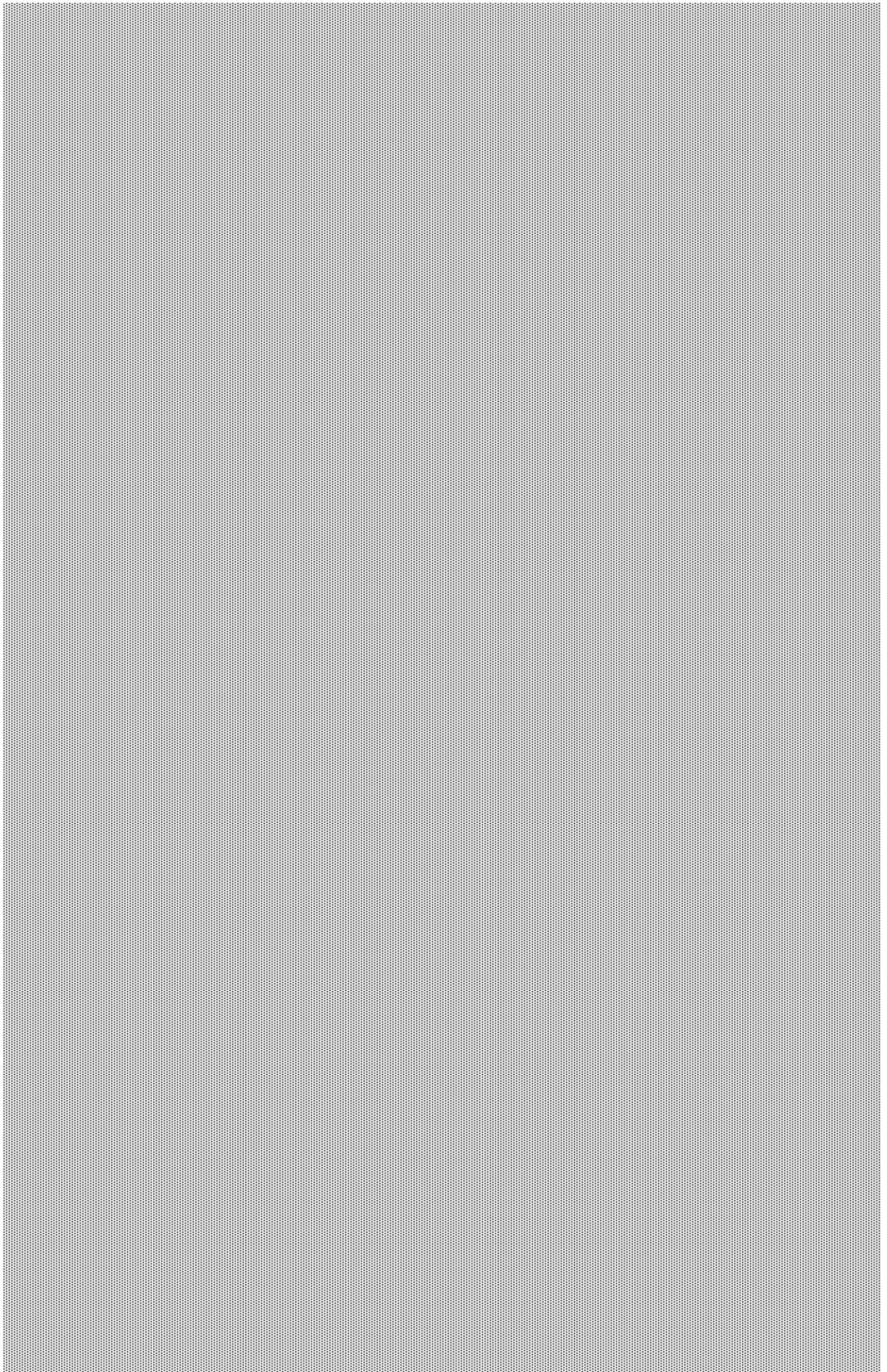


図 2-1







2020 年度

東京都立大学 大学院理学研究科  
(現 首都大学東京 大学院理学研究科)

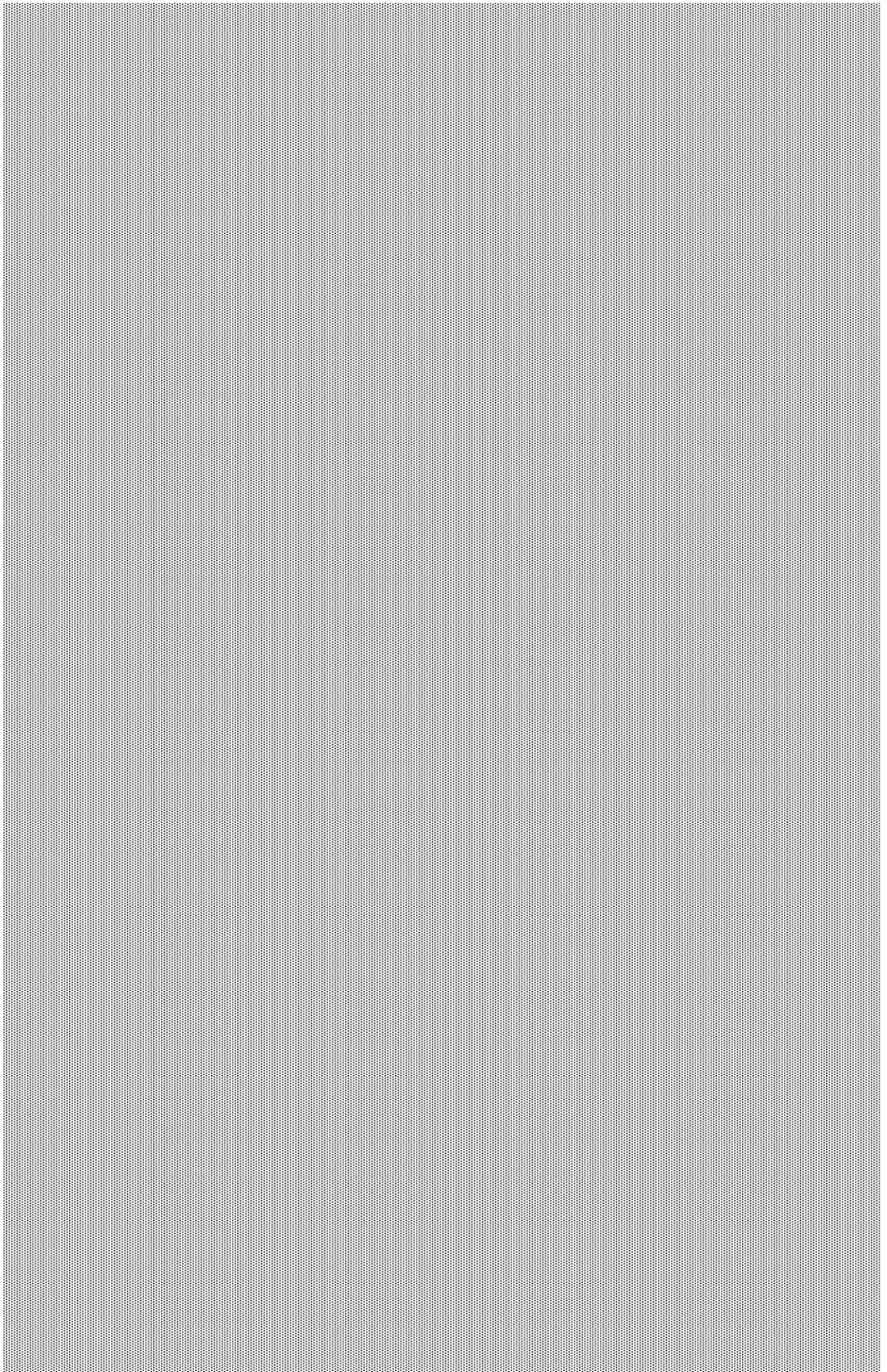
物理学専攻博士前期課程冬季入学試験問題

物理学 II (50 分)

2019 年 2 月 6 日 (木)

11:00 ~ 11:50

**注意** 問題 (物理学 II [1], 物理学 II [2]) ごとに答案用紙各 1 枚を使用し, 解答は 1 題について 1 枚の答案用紙の表裏に取めよ. たとえ白紙であっても, 必ず 2 題分の答案用紙に受験番号と氏名を記入して提出すること. また, 計算用紙は全て提出すること.



## 2020 年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 II」

[1] 以下の問いに答えよ。結果だけでなく、求め方や計算の過程も示すこと。プランク定数を  $h$ ,  $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$  とする。

$V_0 > 0$  として式 (1) で表される一次元ポテンシャルに  $x < 0$  の領域から正の向きに、質量  $m$ , エネルギー  $E$  の量子論的自由粒子が入射する。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ V_0 & (x \geq 0) \end{cases} \quad (1)$$

$E = 2V_0$  の粒子が入射するとき

問 1 透過率を求めよ。

問 2 古典論的粒子の場合には透過率がどうなるか答えよ。計算の必要はない。

$E = \frac{1}{2}V_0$  の粒子が入射するとき

問 3 反射率を求めよ。

問 4  $x \geq 0$  における粒子の存在確率密度を、 $x = 0$  で 1 とする  $x$  の関数として表わし、おおまかに図示せよ。

## 2020 年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 II」

[2] 以下の問いに答えよ。結果だけでなく、求め方や計算の過程も示すこと。ボルツマン定数を  $k$  とする。

大きさが  $\frac{1}{2}$  のスピン  $N$  個からなるスピン系が一様な磁束密度  $B$  の磁場中に置かれていて、外界から孤立している。各スピンは磁場に平行あるいは反平行の向きのみが許されており、それぞれ、磁場に平行なスピンは  $-\mu B$ 、反平行なスピンは  $+\mu B$  のエネルギーをもつ。ここで、 $\mu$  は磁気モーメントの大きさである。いまこの系において、磁場に平行なスピンの数が  $\frac{1}{2}(N+L)$  個、磁場に反平行なスピンの数が  $\frac{1}{2}(N-L)$  個あるとする。

問1 系の全エネルギー  $E$  と磁化  $M$  を求めよ。

問2 この系の状態数  $W$  を求めよ。

問3 この系のエントロピー  $S$  を求めよ。ただし、 $N \gg 1$  のときに成り立つ近似式  $\ln N! \approx N \ln N - N$  を用いること。

いま、熱力学量  $T$  を

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$$

と定義する。

問4 系の全エネルギー  $E$  を  $T$  の関数として表せ。

問5  $B \rightarrow 0$  で磁化率が  $\chi = \frac{N\mu^2}{kT}$  になることを示せ。

