2020年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学II」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．h をプランク定数，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ とする．

問1 振動子の質量を m，運動量演算子を $\hat{p}$，位置演算子を $\hat{x}$, 角振動数を ω として，ハミルトニアン $\hat{H}$ が

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

の形に書ける量子論的な1次元調和振動子を考える．また，演算子

$$\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right), \quad \hat{a}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$

および $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$ を定義する．

1-1) $\hat{p}$ と $\hat{x}$ の交換関係を用いて交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を示せ．

1-2) $\hat{p}$ と $\hat{x}$ を $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を用いて書き表せ．また，$\hat{H}$ を $\hat{N}$ を用いて書き換えよ．

1-3) 演算子 $\hat{N}$ の固有値は負にならないことを示せ．

1-4) 交換関係 $[\hat{N}, \hat{a}]$ を計算せよ．

1-5) 上の問いから $\hat{a}$ がどのような演算子か考えて，基底状態の波動関数を $\psi_0(x)$ とするとき $\hat{a}\psi_0(x)$ が満たすべき方程式を示せ．また，これを解いて $\psi_0(x)$ を求めよ．規格化しなくてよい．

1-6) 基底状態における存在確率 $|\psi_0(x)|^2$ の概略を図示し，存在確率が最大になる位置を答えよ．また，比較として，振幅 A の x 軸上の古典論的1次元調和振動子を考え，存在確率が最大になる位置を答えよ．

問2 電子のスピン演算子 $\hat{\boldsymbol{s}}$ の z 成分を対角化し，$\hat{\boldsymbol{s}}^2$ と $\hat{s}_z$ の同時固有状態を

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\beta\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で表す．$\hat{\boldsymbol{s}} = \dfrac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ と書かれるパウリのスピン行列 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ は

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で表される．また，演算子 $\hat{s}_\pm \equiv \hat{s}_x \pm i\hat{s}_y$ (複号同順) を定義する．

2-1) $\hat{s}_\pm$ を行列表現せよ．また，$\hat{s}_+|\alpha\rangle$ および $\hat{s}_-|\alpha\rangle$ を計算せよ．

2-2) $|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta|$ を計算せよ．

2020年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学II」

[2] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく, 求め方や計算の過程も示すこと．ただし, k_{B} をボルツマン定数，h をプランク定数, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ とする.

問1 次式で与えられる固有エネルギーを持つ量子論的1次元調和振動子を考える.

$$\epsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

ここで n は0以上の整数である。温度 T のカノニカル分布を仮定して以下の問いに答えよ.

1-1) この調和振動子の分配関数 Z が次式で与えられることを示せ.

$$Z = \frac{e^{-\hbar\omega/2k_{\mathrm{B}}T}}{1 - e^{-\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T}}$$

1-2) この調和振動子のヘルムホルツの自由エネルギーが次式で表されることを示せ.

$$F = \frac{1}{2}\hbar\omega + k_{\mathrm{B}}T\ln\{1 - \exp(-\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T)\}$$

1-3) エントロピーと自由エネルギーの関係を用いて, 内部エネルギー U が次式になることを示せ.

$$U = \hbar\omega\left[\frac{1}{e^{\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T} - 1} + \frac{1}{2}\right]$$

1-4) 高温の極限 (古典的調和振動子) での内部エネルギーを求め, さらにそれがエネルギー等分配則を満たしていることを説明せよ.

問2　N 個の電子を理想フェルミ気体として考える. 各電子はスピン自由度を持っており, エネルギー ϵ における1スピン自由度あたりの状態密度 $D(\epsilon)$ は

$$D(\epsilon) = \begin{cases} A\epsilon^{1/2} & (\epsilon \geq 0) \\ 0 & (\epsilon < 0) \end{cases}$$

で与えられるものとする. ここで A は正の実定数である.

2-1) フェルミ分布関数 $f(\epsilon)$ の絶対零度と有限温度における関数形を横軸を ϵ にとって大まかに描け. ただし, 縦軸には0と1の目盛りを書くこと.

2-2) 絶対零度における電子系のフェルミエネルギー ϵ_{F} を求めよ.

2-3) 絶対零度における電子系の全エネルギーを E とする. 1電子あたりの平均エネルギー E/N を ϵ_{F} を用いて表せ.