

## 2021 年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「数学」

以下の問いに答えよ。結果だけでなく、求め方や計算の過程も示すこと。

問1 つぎの式をみたす複素数  $z$  を求めたい。

$$\frac{1}{2i} [\exp(iz) - \exp(-iz)] = 2 \quad (1)$$

1.1  $t = \exp(iz)$  とおいたとき、(1) 式がみたす  $t$  の二次方程式を求めよ。

1.2 (1) 式をみたす複素数  $z$  の実部  $\operatorname{Re}(z)$  と虚部  $\operatorname{Im}(z)$  をそれぞれ求めよ。  
ただし  $0 \leq \operatorname{Re}(z) < 2\pi$  とする。

問2 行列

$$M = \begin{pmatrix} a + \frac{b}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}b \\ \frac{\sqrt{3}}{2}b & a - \frac{b}{2} \end{pmatrix}$$

を考える。但し、 $a, b$  は  $a > b > 0$  を満たす実数とする。

2.1 行列  $M$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 < \lambda_2$ ) を求めよ。

2.2 行列  $M$  を

$$U^{-1} M U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

のように対角化する直交行列  $U$  を求めよ。

2.3 行列の指数関数を

$$\exp(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$$

で定義するとき、行列  $\exp(M)$  の各成分を  $\exp(a), \exp(-a), \exp(b), \exp(-b)$  で表わせ。ただし、 $M^0$  は単位行列とする。

## 2021 年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 I」

[1] 以下の問いに答えよ。結果だけでなく、求め方や計算の過程も示すこと。

半径  $R$ 、質量  $M$  の均一で十分に長い円柱を考える。円柱は図 1 のような十分に長くあらい斜面上（傾斜角  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < \pi/2$ ）を最大傾斜角方向に運動する。斜面方向に座標軸をとり、下向きを正とする。時刻  $t = 0$  に、円柱の重心に初速度  $V_0$  を正の向きに与える。重力加速度の大きさを  $g$  とする。

問 1 円柱の円形断面の中心軸まわりの慣性モーメント  $I$  が  $I = \frac{MR^2}{2}$  となることを示せ。

問 2 初速度  $V_0 = 0$  のとき、円柱は滑らずに転がりながら運動した。斜面上を転がる円柱の重心速度を時刻  $t$  の関数で表せ。

問 3 初速度  $V_0 > 0$  の場合、時刻  $t = 0$  において円柱は回転ゼロで運動を始め、ある時刻  $t'$  で円柱が滑らずに転がり始めた。斜面と円柱の間の動摩擦係数を  $\mu'$  とする。このとき、円柱が滑らずに転がるための条件を求めよ。

問 4 時刻  $t'$  を求めよ。

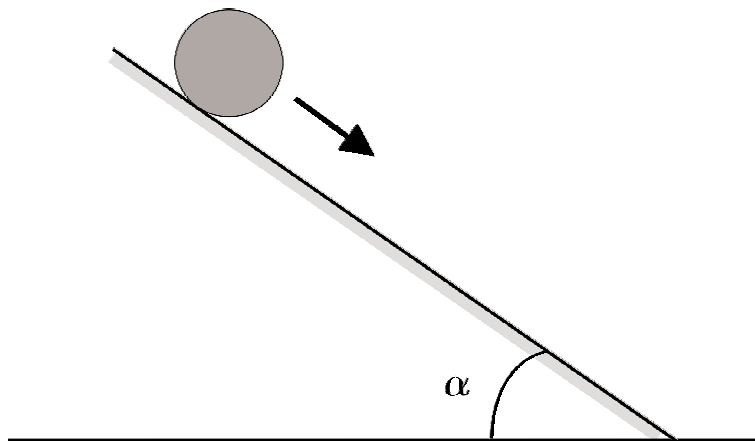


図 1

## 2021 年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 I」

[2] 図2のように面積  $S$ , 間隔  $d$  の, 導体 A, B でできた平行板コンデンサが真空中にある. それぞれの導体の厚さは無視できるものとする. 導体 A に電荷  $Q$  を与え, 導体 B にある電荷を与えたところ. コンデンサの上側 (図の導体 A の上側) の空間の電場  $E$  がゼロになった. 電荷は導体に一様に分布し, 導体の端の効果は考えなくてよい. これについて以下の問いに答えよ. 答えは  $Q, S, d$ , 真空の誘電率  $\epsilon_0$  の中から必要なものを選んで表せ. 結果だけでなく, 求め方や計算の過程も示すこと.

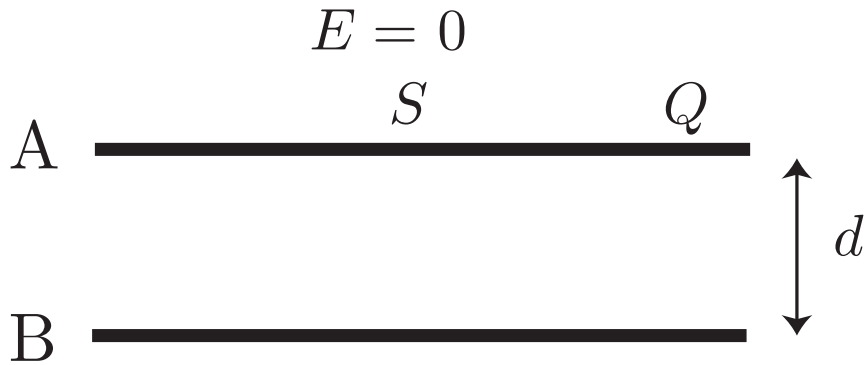


図2

- 問1 導体 A に分布した電荷が, その上下の空間に作る電場の大きさ (上下で同じ) を求めよ.  
なお, 導体 B 上の電荷が作る電場はここでは含めないとする.
- 問2 導体 B に与えた電荷を求めよ.
- 問3 導体 A と導体 B の間の空間における電場の大きさを求めよ.
- 問4 導体 A と導体 B の間の電位差を求めよ.
- 問5 図2の導体 B の下側における電場の大きさを求めよ.