2021年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学II」

[1] 質量 m の一次元系の自由粒子を考える．粒子の位置座標を x とし，その波動関数を $\psi(x)$ と表す．$L > 0$ として，$-\dfrac{L}{2} \leq x \leq \dfrac{L}{2}$ の領域を考えて，周期境界条件:$\psi\left(-\dfrac{L}{2}\right) = \psi\left(\dfrac{L}{2}\right)$，$\left.\dfrac{d\psi(x)}{dx}\right|_{x=-\frac{L}{2}} = \left.\dfrac{d\psi(x)}{dx}\right|_{x=\frac{L}{2}}$ を課すものとする．プランク定数を h，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ として，以下の問いに答えよ．

問1 波動関数 $\phi(x)$ がエネルギー固有状態であり，そのエネルギー固有値が ϵ であるとき，波動関数 $\phi(-x)$ はエネルギー固有状態となる．その理由を数式を用いて説明し，波動関数 $\phi(-x)$ の固有エネルギーを答えよ．

問2 エネルギー固有状態の波動関数は，k，A_k，B_k を実数の定数として，

$$\psi(x) = A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$$

の形でかける．境界条件を満たす k の値を求め，エネルギー固有値を全て求めよ．

問3 エネルギー固有値 ϵ が $\epsilon \leq \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{2\pi\hbar}{L}\right)^2$ を満たす互いに直交するエネルギー固有状態の波動関数を，対応する ϵ とともに全て求めよ．ただし，波動関数は $-\dfrac{L}{2} \leq x \leq \dfrac{L}{2}$ の領域で規格化すること．

問4 波動関数が $\psi(x) = \sqrt{\dfrac{8}{3L}} \cos^2\left(\dfrac{\pi x}{L}\right)$ のとき，$\psi(x)$ に含まれる基底状態成分の振幅の二乗の大きさを求めよ．

2021年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学II」

[2] 2つのエネルギー準位 $E, E+\varepsilon$（$E>0, \varepsilon>0$）をもつ原子 N 個からなる系が温度 T の平衡状態にある．互いの原子の間に相互作用はないものとする．以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．ただし，k をボルツマン定数とする．

問1　系の分配関数を求めよ．

問2　系のヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ．

問3　系の内部エネルギーを求めよ．

問4　系の熱容量を求めよ．

問5　低温極限（$kT \ll \varepsilon$），および高温極限（$kT \gg \varepsilon$）における熱容量を求めよ．