2022 年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 II」

[1] 以下の問いに答えよ．答えは結果だけでなく, 求め方や計算の過程も示すこと．ただし, h をプランク定数, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ とする．

問 1 量子論的粒子が $0 \le x \le L$ の一次元空間を運動している．この粒子の波動関数を $\psi(x,t)$ する．

まず, ポテンシャルが作用しない自由粒子の時を考える．区間 $0 \le x \le L$ で波動関数が周期境界条件を満たす時, エネルギー固有値は離散的な値を取り, 任意の状態 $\psi(x,t)$ は固有値 E_n を持つ固有関数 $u_n(x)$（n は 0 以上の整数）を用いて

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) u_n(x)$$

と展開できる．

1-1) 時間に依存するシュレディンガー方程式を書け．

1-2) $u_n(x)$ が満たすべきシュレディンガー方程式と周期境界条件を示す式を書け．

1-3) 規格化した固有関数 $u_n(x)$ と固有値 E_n を求めよ．

次に無限の高さを持つ井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ 0 & (0 \le x \le L) \\ \infty & (x > L) \end{cases}$$

の中の運動を考える．

1-4) 井戸に束縛される系における定常状態を考える．固有状態のうち, 基底状態と第一励起状態の規格化された固有関数の概形を書け．

今, $\rho(x,t)$ および $j(x,t)$ を

$$\rho(x,t) \equiv |\psi(x,t)|^2, \quad j(x,t) \equiv -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*(x,t)\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} - \psi(x,t)\frac{\partial \psi^*(x,t)}{\partial x}\right)$$

と定義する．

1-5) $\rho(x,t)$ と $j(x,t)$ の間に成り立つ関係式を示し, それの物理的意味を説明せよ．

問 2 スピン 1/2 の 2 準位系を考える．スピン角運動量の z 成分を表す演算子 $\hat{S}_z$ に対する固有ベクトルを $|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\beta\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく．すなわち, $\hat{S}_z|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2}|\alpha\rangle$, $\hat{S}_z|\beta\rangle = \frac{\hbar}{2}|\beta\rangle$ である．

2-1) 固有ベクトル $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ は完全規格直交系をなすので, 任意の規格化された状態ベクトルは $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ の重ね合わせの状態 $|\psi\rangle = a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle$ で書ける．a, b が満たすべき関係式を求め, $|a|^2$, $|b|^2$ の物理的意味を説明せよ．

2-2) パウリ行列 $\hat{\sigma}_z$ を $\frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_z = \hat{S}_z$ と定義する．この時 $\langle\alpha|\hat{\sigma}_z|\alpha\rangle$, $\langle\beta|\hat{\sigma}_z|\beta\rangle$ を求めよ．

2-3) 昇降演算子 $\hat{\sigma}_\pm$ を用いると基底状態ベクトル $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ の間には $\hat{\sigma}_-|\alpha\rangle = 2|\beta\rangle$, $\hat{\sigma}_+|\beta\rangle = 2|\alpha\rangle$, $\hat{\sigma}_+|\alpha\rangle = \hat{\sigma}_-|\beta\rangle = 0$ の関係が成り立つ．昇降演算子の行列表現

$$\hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} \langle\alpha|\hat{\sigma}_+|\alpha\rangle & \langle\alpha|\hat{\sigma}_+|\beta\rangle \\ \langle\beta|\hat{\sigma}_+|\alpha\rangle & \langle\beta|\hat{\sigma}_+|\beta\rangle \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} \langle\alpha|\hat{\sigma}_-|\alpha\rangle & \langle\alpha|\hat{\sigma}_-|\beta\rangle \\ \langle\beta|\hat{\sigma}_-|\alpha\rangle & \langle\beta|\hat{\sigma}_-|\beta\rangle \end{pmatrix}$$

を求めよ．この結果からこの昇降演算子行列の非対角成分のもつ物理的意味を簡潔に説明せよ．

2-4) パウリ行列 $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$ を用いると昇降演算子は $\hat{\sigma}_\pm = \hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y$ と定義できる．パウリ行列 $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ の行列表現を求めよ．

2-5) $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\alpha\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\beta\rangle$ に対する $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ の期待値を求めよ．

2022 年度大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 II」

[2] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．ただし，k をボルツマン定数，h をプランク定数，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ とする．

問 1　体積 V の 3 次元の容器中にある質量 m の同種粒子 N 個からなる単原子分子理想気体を考える．容器は熱浴と接し温度 T の熱平衡状態にあるとする．ただし，$N \gg 1$ とする．以下の問いに答えよ．

1-1) 系の量子論的な分配関数は，系の位相空間の変数 (q_i, p_i) を用いて状態数を古典的に近似することにより

$$Z = \frac{1}{h^{3N} N!} \int e^{-\frac{1}{kT}H} d\Gamma \qquad \left(d\Gamma = \prod_{i=1}^{3N} dq_i dp_i\right) \tag{1}$$

と表される．ここで，H は系のハミルトニアンである．右辺に因子 $\dfrac{1}{N!}$ がつく物理的な理由を説明せよ．

1-2) 系のハミルトニアンが $H = \displaystyle\sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}$ であることから系の分配関数 Z を具体的に求めよ．必要であれば，α を正の定数とする積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

を用いよ．

1-3) ヘルムホルツの自由エネルギーを求めることにより，理想気体の状態方程式

$$pV = NkT$$

を導け．ここで p は気体の圧力である．N が大きいときに成り立つスターリングの公式 $\log N! \approx N \log N - N$ を用いよ．

1-4) 量子論的な分配関数が (1) 式のように古典的な近似を用いて与えられるための条件は何か．理由と共に記せ．

問 2　固有振動の角振動数が ω と $\omega + d\omega$ の間にある状態数が $g(\omega)d\omega$ で与えられるような連続弾性体を考える．いま，連続弾性体は熱浴と接し温度 T の平衡状態にあるとする．以下の問いに答えよ．

2-1) 連続弾性体は，角振動数 $\omega (> 0)$ が連続的な値をとる調和振動子の集合体とみなすことができる．角振動数 ω をもつ 1 つの調和振動子の分配関数が $Z_1 = \left(2 \sinh \dfrac{\hbar\omega}{2kT}\right)^{-1}$ で与えられることを用いて，ヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ．ただし，答えには積分の形が残っていても良い．

2-2) 内部エネルギーを

$$U = \int_0^{\infty} \varepsilon(\omega, T) g(\omega) d\omega$$

の形で表したとき，$\varepsilon(\omega, T)$ を具体的に求めよ．また，$T \to 0$ の極限での ε の値を求めよ．

2-3) $\varepsilon(\omega, T)$ は物理的に何を表すか，答えよ．