

2022年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「数学」

以下の問いに答えよ。結果だけでなく、求め方や計算の過程も示すこと。

問1 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

とする。

1-1) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ。但し $\lambda_1 < \lambda_2$ とする。

1-2) 1-1) で求めた固有値 λ_1, λ_2 に対して

$$A\vec{u}_1 = \lambda_1\vec{u}_1, \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}, \quad u_{11}^2 + u_{12}^2 = 1$$

$$A\vec{u}_2 = \lambda_2\vec{u}_2, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix}, \quad u_{21}^2 + u_{22}^2 = 1$$

となり、 $u_{11} > 0, u_{21} > 0$ となる実ベクトル \vec{u}_1, \vec{u}_2 を求めよ。

1-3) 行列 A に対して

$$U^T A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

となるような実行列 U を求めよ。ここで U^T は行列 U の転置行列を表す。

問2 a を正の実数とする。

2-1) 次の複素関数 $F(z)$ の複素平面における極の位置を全て求めよ。

$$F(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$$

2-2) 次の積分をコーシーの定理により求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx$$

2022 年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 I」

[1] 以下の問いに答えよ。結果だけでなく、求め方や計算の過程も示すこと。重力加速度を g とする。

図 1 のように、半径 a 、質量 M の一様な薄い円板を、円板の中心 O から距離 r ($0 < r < a$) の位置にある点 P を支点にしてぶら下げた。このとき、円板に平行な面内における円板の運動を考える。鉛直線と線分 OP のなす角を θ とする。

問 1 円板を点 P まわりに回転させる力のモーメントの大きさを r , M , θ を用いて表せ。

問 2 円板の点 P まわりの慣性モーメントを I として、円板の運動方程式を書き表せ。

問 3 振幅が十分に小さい場合における円板の単振動の周期を I , M , r を用いて表せ。

問 4 円板に垂直で、点 O を通る軸まわりの慣性モーメントを a , M を用いて表せ。

問 5 円板に垂直で、点 P を通る軸まわりの慣性モーメントを a , r , M を用いて表せ。

問 6 この円板の単振動の周期が最も小さくなる r を、 a を用いて表せ。

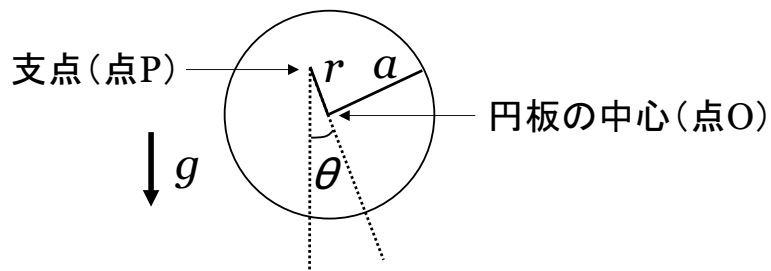


図 1

2022年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学I」

[2] 真空の誘電率を ϵ_0 として、以下の問いに答えよ。結果だけでなく、求め方や計算の過程も示すこと。

問1 真空中の位置 $(x, y, z) = (0, 0, h)$ ($h \neq 0$) に点電荷 q がある。位置 (a, a, a) における電場ベクトルを求めよ。

問2 無限に広い導体面が $z = 0$ にあり、真空中の位置 $(0, 0, h)$ ($h > 0$) に点電荷 q ($q > 0$) がある。

2-1) xz 平面における電気力線の概形を描け。原点および点 $(0, 0, h)$ を含むように描くこと。

2-2) 点電荷 q が受ける力の大きさと向きを求めよ。

2-3) 導体面上の位置 $(a, 0, 0)$ に誘起される電荷の面密度を求めよ。

2-4) 点電荷から十分離れた位置 (a, a, a) ($a \gg h$) における電場ベクトル \mathbf{E} が、

$$\mathbf{E} = \frac{qh}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a^3} (1, 1, 0)$$

と表されることを示せ。