2022年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学II」

[1] 以下の問いに答えよ. 答えは結果だけでなく, 求め方や計算の過程も示すこと. ただし, プランク定数を h とし, $\hbar = h/2\pi$ とする.

次のポテンシャル中における質量 m, エネルギー E の一粒子の x 軸上の1次元運動を考える.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < -L) \\ -U & (-L \le x \le L) \\ 0 & (x > L) \end{cases}$$

L, U は正の実数とし, また, $-U < E < 0$ とする. 粒子の波動関数を $\psi(x)$ としたとき, シュレーディンガー方程式は以下のように書ける.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x). \tag{1}$$

ここで, $k = \frac{\sqrt{2m(U+E)}}{\hbar}$, $\alpha = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$ とおき, 以下の問いでは k と α を解答に用いて良い.

問1 $|x| \le L$ の時, 式(1)の一般解を求めよ.

問2 $|x| > L$ の時, 式(1)の一般解を求めよ.

問3 ここで, 無限遠方では $\psi(x) = 0$ とし, 領域全体で $\psi(x)$ が偶関数となる場合を考える. $x = \pm L$ で $\psi(x)$ と $d\psi(x)/dx$ が連続となることから, α を k と L を用いて表せ.

次に, 以下のポテンシャル中における運動を考える.

$$V(x) = -W\delta(x) \tag{2}$$

ただし, $\delta(x)$ はデルタ関数であり, W は正の実数である.

問4 規格化された波動関数を求めよ.

問5 シュレーディンガー方程式を $-\epsilon$ から ϵ $(\epsilon > 0)$ の範囲で積分し, $\epsilon \to 0$ とすることで, エネルギー固有値を m, W を用いて表せ.

2022 年度大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 II」

[2] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．ただし，k をボルツマン定数とする．

無限個の離散的なエネルギー準位 $E_0, E_1, \cdots$ をもち (ただし，$0 < E_0 < E_1 < \cdots$ とする)，各エネルギー E_n の状態にある確率が p_n で与えられるような系を考える．ここで，確率 p_n は以下のように規格化されており，

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1, \tag{1}$$

系の平均エネルギーは有限の値 E を取るものとする．

問 1　系の平均エネルギー E を，p_n および E_n $(n = 0, 1, \cdots)$ を用いて表せ．

問 2　規格化条件 (1) および，平均エネルギー E が一定であるという拘束条件のもとで，以下で定義される量

$$S = -k \sum_{n=0}^{\infty} p_n \log p_n \tag{2}$$

が極値をもつような p_n をラグランジュの未定乗数法を用いることにより求めたい．未定乗数を a, b として，$(S + aE + b)$ を p_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ の関数と考え，p_n に対する変分がゼロになる条件より，p_n を a, b, k, E_n を用いて表せ．

問 3　規格化条件 (1) を用いることにより，p_n は以下のように表されることを示せ．

$$p_n = e^{\frac{a}{k}E_n} \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{a}{k}E_n}$$

以下では系が温度 T の平衡状態にあるとする．

問 4　未定乗数 a を求めよ．

問 5　系のヘルムホルツの自由エネルギーを k, T, E_n を用いて書き表せ．

問 6　系の平均エネルギー E が有限の値を取るとき，温度 $T \geqq 0$ となることを示せ．