大学院博士前期課程夏季入学試験問題「数学」

以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問 1 2 つの演算子 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ があり，以下の交換関係を満たすものとする．

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = c\hat{I}$$

ここで c はゼロでない定数である．$\hat{I}$ は恒等演算子で, 任意の演算子 $\hat{M}$ に対し $\hat{I}\hat{M} = \hat{M}\hat{I} = \hat{M}$ を満たす．さらに任意の演算子 $\hat{M}$ に対し，その「指数関数」をテイラー展開により次のように定義する．

$$\exp(\hat{M}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{M}^n$$

ただし，$\hat{M}^0 = \hat{I}$，$0! = 1$ である．

1-1) $\hbar$ は 1 より充分小さい正の定数とする．$\exp(-\hbar\hat{A}), \exp(-\hbar\hat{B}), \exp(\hbar\hat{A} + \hbar\hat{B})$ をそれぞれ $\hbar$ の 2 乗まで展開せよ．

1-2) **1-1)** の結果を用い，

$$\exp(-\hbar\hat{A}) \exp(\hbar\hat{A} + \hbar\hat{B}) \exp(-\hbar\hat{B})$$

を $\hbar$ の 2 乗まで計算せよ．答えは $\hbar, \hat{I}, c$ を用いて表すこと．

問 2 次の実数 x に関する積分を複素平面を用いて求めよう．

$$\int_0^{\pi} \tan(x - ia) dx \tag{1}$$

ここで a は正の実数，$i^2 = -1$ とする．

2-1) $z = e^{2ix}$ とおく．$\tan(x - ia)$ を三角関数を使わず z の関数として表せ．なお，三角関数と指数関数には一般に

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

という関係があることを用いてよい．

2-2) 式 (1) の積分を z に関する複素平面上の積分に書き直せ．また，積分経路 (以下 C と呼ぶ) を z に関する複素平面上に図示せよ．

2-3) **2-2)** で書き直した積分について被積分関数の極を求め，**2-2)** で描いた複素平面上に図示せよ．

2-4) 留数定理を用いて **2-2)** で書き直した積分，すなわち式 (1) の積分の値を求めよ．

大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 I」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問 1　軽いばね（自然長 ℓ，ばね定数 k）で連結された質量 m_1 の質点 1 と質量 m_2 の質点 2（ただし，$m_2 > m_1$）が，x 軸上を運動する．ばねをのばし，長さ L ($\ell < L < 2\ell$) として固定したとき，質点系の重心は $x = 0$ であった．両質点をはなした時刻を $t = 0$，質点 1 と質点 2 の位置をそれぞれ $x_1(t), x_2(t)$（ただし，$x_1 < x_2$）とする．ただし，ばねの力以外は考慮しないものとする．

1-1) $t = 0$ における質点 1，質点 2 の位置 $x_1(0), x_2(0)$ をそれぞれ求めよ．

1-2) 質点 1 と質点 2 に関する運動方程式をそれぞれ求めよ．

1-3) $x_1(t), x_2(t)$ を時間の関数としてそれぞれ求めよ．

1-4) $L = \dfrac{3}{2}\ell$ としたときの $x_1(t), x_2(t)$ の概形を，1 つのグラフに示せ．

問 2　図 1 のような断面（外半径 a，内半径 b）を持ち質量 M の均一な中空円板を考える．中空円板は中心のまわりを角速度 ω_0 で回転しており，時刻 $t = 0$ においてブレーキ板を力 F で押さえつけ，回転運動を止めた．中空円板とブレーキ板の間の動摩擦係数を μ' とし，中空円板およびブレーキ板は変形しないものとする．また，中空円板の中心およびブレーキ板の位置は変わらないものとする．

2-1) 中空円板の中心まわりの慣性モーメントを求めよ．

2-2) 中空円板の中心まわりの慣性モーメントを I，時刻 t での角速度を $\omega(t)$ として，力 F がかかっているときの運動方程式を示せ．

2-3) $t = 0$ でブレーキ板を押し付けてから回転が止まるまでの時間，および回転が止まるまでに回転した角度を求めよ．

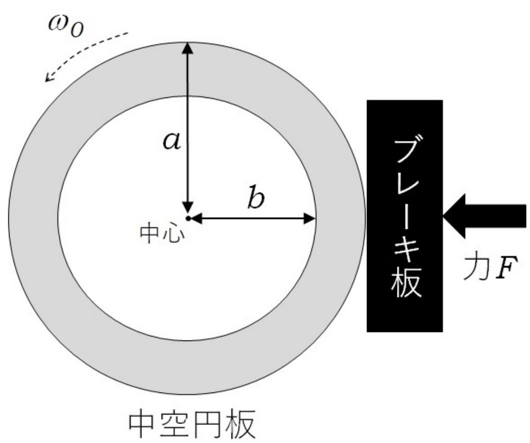

図 1

大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 I」

[2] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく, 求め方や計算の過程も示すこと．真空の誘電率を ϵ_0, 真空の透磁率を μ_0 とする．

問 1　図 2 のように真空中の y 軸上に無限に長い直線導体を置き，一辺の長さが ℓ の正方形コイル ABCD を，辺 AD が y 軸と平行，かつ y 軸から辺 AD までの距離が a になるように xy 平面内に置く．直線導体とコイルにそれぞれ電流 I_1 と I_2 を図の矢印の向きに流す．

1-1) 直線導体に流れる電流 I_1 が位置 $(x, 0, 0)$ に作る磁場ベクトル $\boldsymbol{B}$ を求めよ．

1-2) 辺 AB と CD にはたらく力の合力ベクトル $\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB+CD}}$ を求めよ．

1-3) 正方形コイルにはたらく全ての力の合力ベクトル $\boldsymbol{F}$ を求めよ．

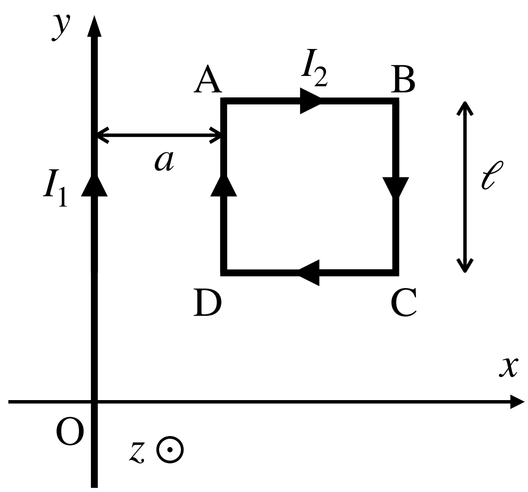

図 2

問 2　真空中を $\boldsymbol{k}$ 方向に進行する電磁波の位置 $\boldsymbol{x}$, 時刻 t での電場は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{E}_0 \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t + \theta)$, 磁場は $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{B}_0 \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t + \theta)$ と表される．ここで ω, θ は 0 でない定数であり $\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{k}$ は定数ベクトルである．

2-1) $\boldsymbol{k} = (0, 0, k)$ の場合，マクスウェル方程式 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$ を用いて電場 $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{k}$ の方向の関係について述べよ．

2-2) 一般の $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$ に対してマクスウェル方程式 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$ を用いて電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ の方向の関係について述べよ．

問 3　真空中の位置 $(x, y, z) = (0, 0, d)$ に点電荷 q，$(x, y, z) = (0, 0, -d)$ に点電荷 $-q$，$(x, y, z) = (0, 0, 0)$ に点電荷 Q がある（$d \neq 0$）．無限遠における電位を 0 とする．

3-1) 位置 $(x, 0, z)$ における電位を求めよ．

3-2) 位置 $(x, 0, z)$ での電場の x 成分を求めよ．

3-3) $\sqrt{x^2 + z^2} = r \gg d$ のとき，$\delta = d/r$ は微小量である．d を消去して，δ の 2 次以上を無視する近似で位置 $(x, 0, z)$ での電場の x 成分を求めよ．