大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 II」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく, 求め方や計算の過程も示すこと．ただし, h をプランク定数, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$， $i^2 = -1$ とする．

問 1　質量 m の粒子が，角振動数 ω で x 軸上を運動する 1 次元の調和振動子を量子力学で考える．以下の計算において，必要であれば，ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (\alpha > 0)$$

を用いよ．

1-1) この系のハミルトニアン $\mathcal{H}$ を位置表示を用いて書き表せ．

1-2) 波動関数 $\psi(x) = A\mathrm{e}^{-ax^2}$ がハミルトニアン $\mathcal{H}$ の固有状態となるように，定数 a を $\hbar, m, \omega$ を用いて表せ．さらに，対応するエネルギー固有値を求めよ．ここで，A は x によらない規格化定数である．

1-3) 1-2) で得られた固有状態 $\psi(x)$ に対して，位置の不確定性 $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ を計算することにより，運動量の不確定性 Δp を求めよ．$\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle$ はそれぞれ，固有状態 $\psi(x)$ に関する x, x^2 の期待値を表す．

1-4) 調和振動子の基底状態，および第一励起状態の固有関数の概形を描け．

問 2　2 つのエネルギー固有状態 ψ_1, ψ_2 のみをもつハミルトニアン $\mathcal{H}_0$ を考える．ここで，ψ_1，および ψ_2 は規格化され，また互いに直交しているものとする．また，それぞれの固有状態に対するエネルギー固有値を E_1，E_2 とする．

2-1) 時刻 $t = 0$ において，系が状態 $\varphi(0) = a_1\psi_1 + a_2\psi_2$ にあったとする．任意の時刻 t における系の状態 $\varphi(t)$ を求めよ．ここで，a_1, a_2 は，$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$ を満たす定数である．

2-2) エネルギーの期待値は時刻 t に依らない定数になることを示せ．

2-3) λ を摂動の強度としたハミルトニアン $\mathcal{H}_0 + \lambda\mathcal{H}_1$ を考える．以下では，$b_n(t)$ $(n = 1, 2)$ を時刻 t の未知関数として，系の波動関数を

$$\varphi(t) = b_1(t)\psi_1\mathrm{e}^{-iE_1t/\hbar} + b_2(t)\psi_2\mathrm{e}^{-iE_2t/\hbar} \tag{1}$$

とおき，$b_n(t)$ $(n = 1, 2)$ を摂動強度 λ のべき級数として，

$$b_n(t) = b_n^{(0)}(t) + \lambda b_n^{(1)}(t) + \cdots \qquad (n = 1, 2) \tag{2}$$

と展開する．このとき，摂動の最低次の係数 $b_n^{(0)}(t)$ $(n = 1, 2)$ は時刻 t に依らない定数となることを示せ．

大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 II」

[2] 以下の問いに答えよ. 結果だけでなく, 求め方や計算の過程も示すこと. ただし, k_B をボルツマン定数, h をプランク定数, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ とする.

問 1　1 個の磁性イオンが電子スピンの磁気量子数の自由度に対応して，$-\mu_B H$ と $\mu_B H$ のエネルギー状態をとるとする．N 個の磁性イオンからなる系を考える．ここで，H は磁場，μ_B はボーア磁子を表す．温度 T のカノニカル分布に従うものとする．

1-1) 1 個の磁性イオンの分配関数を求めよ．また，系の分配関数 Z_N を求めよ．

1-2) 温度が十分に高く，$k_B T \gg \mu_B H$ のとき，系のヘルムホルツの自由エネルギー F の近似形は次のようになる．

$$F = -a k_B T - b\frac{(\mu_B H)^2}{k_B T}$$

a と b を求めよ．

1-3) $T \to \infty$ におけるエントロピーを求めよ．

問 2　体積 V の立方体の中に閉じ込められた N 個のスピン 1/2，質量 m のフェルミ粒子からなる理想フェルミ気体について考える．このとき，このフェルミ粒子のエネルギー ϵ における状態密度 $D(\epsilon)$ は

$$D(\epsilon) = \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3}\sqrt{\epsilon}$$

で書けるとする．温度は T とする．

2-1) $T = 0$ のとき，フェルミ粒子が取り得るエネルギーの最大値 ϵ_F を求めよ．

2-2) $T = 0$ のとき，全フェルミ粒子のエネルギーの和（内部エネルギー）を ϵ_F と N を用いて表せ．

2-3) $T \neq 0$ のとき，フェルミ粒子の状態占有率 $f(\epsilon)$ は，定数 μ を用いて以下の式で書ける．

$$f(\epsilon) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon-\mu}{k_B T}\right) + 1}$$

$\mu \gg k_B T$ のとき，横軸 ϵ として $f(\epsilon)$ を図示せよ．ただし，$\epsilon = 0$ における $f(\epsilon)$ の値，および，$\epsilon = \mu$ の位置がわかるように図示せよ．

2-4) $T \neq 0$ のとき，$\displaystyle\int_0^\infty f(\epsilon) D(\epsilon) d\epsilon$ が表す物理量は何か説明せよ．