大学院博士前期課程冬季入学試験問題「数学」

以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問 1　次の 3×3 行列を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1-1)　この行列の 3 つの固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ．ただし $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ とする．

1-2)　最小の固有値 λ_1 について，以下の式を満たす固有ベクトル $\vec{v}$ を求めよ．

$$A\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}$$

ただし $|\vec{v}| = 1$ とする．

問 2　次の 2×2 行列

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

と，以下のような行列の関数を定義する．

$$\exp[x\sigma] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x\sigma)^n$$

ただし x は実数であり，$i^2 = -1$, $0! = 1$, $(x\sigma)^0 = I$ とする．ここで，

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は単位行列である．

2-1)　行列 $\sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$ をそれぞれ求めよ．

2-2)　行列 $\exp[x\sigma]$ が，

$$\exp[x\sigma] = f(x)I + g(x)\sigma$$

の形で表現できることを示し，$f(x)$ と $g(x)$ を級数展開しない（つまり $\sum$ を使わない）形で求めよ．

問 3　以下の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

必要があれば $u = \tan(x/2)$ と置換し，以下の式を用いてよい．

$$\cos x = \frac{1 - (\tan\frac{x}{2})^2}{1 + (\tan\frac{x}{2})^2}$$

大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 I」

[1] 質量 M，長さ L の一様な細い剛体棒の一点を回転軸とし，時刻 $t=0$ に静かに剛体棒を放し鉛直面内で小さく振動させる．剛体棒の端を点 O とし，中点を点 G とする．鉛直軸と直線 OG のなす角を θ とし，$t=0$ における θ を θ_0 とする．回転軸と剛体棒の間の摩擦および空気抵抗の影響は考慮しないものとする．重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ．結果だけでなく求め方や計算の過程も示すこと．

まず図 1 のように，回転軸の位置を点 O とした場合を考える．

問 1　点 O を通る回転軸まわりの剛体棒の慣性モーメントが $I=\frac{ML^2}{3}$ となることを示せ．

問 2　剛体棒の重心が点 G にあることを考慮し，剛体棒の θ 方向の運動方程式を表せ．

問 3　θ が十分に小さいとして，θ を t の関数で表せ．

問 4　$\theta=0$ のときの剛体棒の回転の運動エネルギーを表せ．

次に図 2 のように，回転軸の位置を点 O と点 G の中点（点 P と呼ぶ）に変えた場合を考える．

問 5　点 P まわりの剛体棒の慣性モーメントを求めよ．

問 6　回転軸を点 O から点 P に変えることで，振動周期が何倍に変化するか説明せよ．

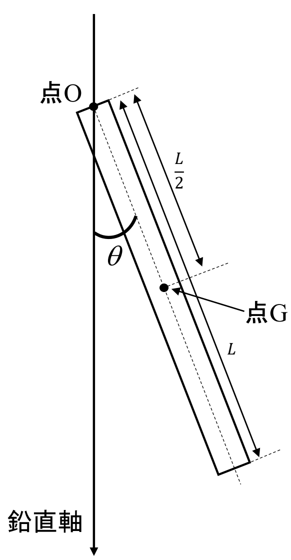

図 1

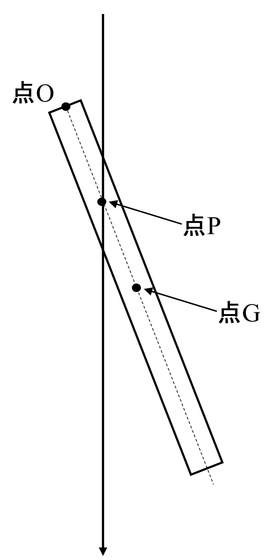

図 2

大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 I」

[2] 電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ がはたらく空間中の電荷 q，質量 m の荷電粒子の運動を考える．時刻 $t=0$ で，原点に初速ゼロで荷電粒子を置き，$t>0$ での位置座標を $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$，速度を $\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)$ とする．以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問 1　荷電粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ に関する運動方程式をベクトルの式で示せ．

問 2　以下 $\boldsymbol{E}=(0,E,0)$ と磁場 $\boldsymbol{B}=(0,0,B)$ の場合を考える．運動方程式の z 成分を用いて，荷電粒子の運動が xy 平面内に限られることを説明せよ．

問 3　運動方程式から v_x を消去し v_y に対する微分方程式を導け．ただし qB/m を ω とおくこと．

問 4　$v_y(t)$ を t の関数として求めよ．

問 5　$x(t), y(t)$ を t の関数として求め，荷電粒子の軌跡を xy 平面内に図示せよ．ただし $q>0$, $E>0$, $B>0$ とする．