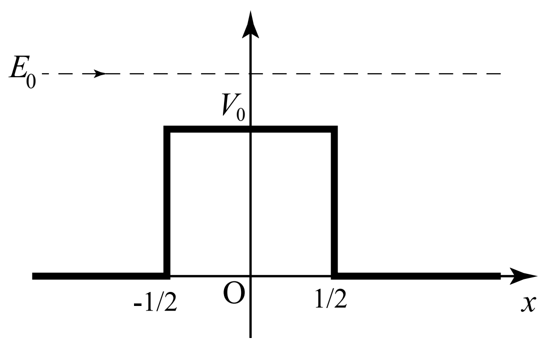
大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 II」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく, 求め方や計算の過程も示すこと．ただし, h をプランク定数, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, $i^2 = -1$ とする.

下図に示すようなポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -1/2 \\ V_0 & |x| \le 1/2 \\ 0 & x > 1/2 \end{cases}$$

の中に，エネルギー E_0 をもつ質量 m の量子力学的粒子が $x = -\infty$ から入射される場合を考える．ここで，E_0, V_0 は定数とし $E_0 > V_0 > 0$ を満たすものとする．



問 1　各領域における波動関数を以下のように表したとする．

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} & x \le -1/2 \\ Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} & |x| \le 1/2 \\ Ee^{ik_1x} & x \ge 1/2 \end{cases}$$

このとき，k_1, k_2 を求めよ．また，$x \le -1/2$ の領域における上記波動関数の右辺第 1 項，第 2 項はそれぞれどのような波を表すか答えよ．

問 2　$x = -1/2$ および $x = 1/2$ における波動関数の接続条件を考慮して, 粒子の透過率 $T = |E/A|^2$ が以下で与えられることを示せ．

$$T = \frac{4k_1^2k_2^2}{4k_1^2k_2^2 + (k_2^2 - k_1^2)^2 \sin^2 k_2}$$

問 3　透過率は $T \le 1$ となることを示せ．

問 4　$T = 1$ となるための条件を求めよ．また，$T = 1$ となるとき，$\psi(-1/2)$ と $\psi(1/2)$ の間に成り立つ関係式を書け．必要があれば $n\ (= 1, 2, 3, ...)$ を使ってよい．

問 5　$T = 1$ となるときの $|\psi(x)|^2$ のグラフの概形を描け．ただし，ポテンシャルの端点 $x = -1/2$ および $x = 1/2$ を図中に明記し，それぞれの領域において $|\psi(x)|^2$ にどのような特徴があるかも説明せよ．

問 6　$T \neq 1$ となるとき，$|x| \le 1/2$ の領域と $x < -1/2$ の領域の $|\psi(x)|^2$ はいずれも振動するが，その波長はどちらが長いか答えよ．また，そうなる理由を述べよ．

大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 II」

[2] 以下の問いに答えよ. 結果だけでなく, 求め方や計算の過程も示すこと.

一次元の x 軸上をランダムウォークする粒子について考える．1 ステップの大きさを ξ, かかる時間を τ とする．各ステップにおいて，x 軸正の向きに進む確率を $1/2$，負の向きに進む確率を $1/2$ とする．$t=0$ において，$x=0$ の位置に粒子がいるものとする．$t=N\tau$ のとき，$x=m\xi$ にいる確率を $W(N,m)$ とする．ただし，N は正の整数，m は整数で $|m|\leq N$ とする.

問 1　N 回ステップ後の位置の期待値を対称性を考慮して求めよ.

問 2　$N+1$ 回ステップで $x=m\xi$ にいる確率 $W(N+1,m)$ を $W(N,m-1)$, $W(N,m+1)$ を用いて表せ.

問 3　$W(4,2)$ を求めよ.

問 4　$W(N,m)$ を求めよ.

問 5　N が大きい長時間極限を考える．以下に示すスターリングの公式を用いて，$\ln W(N,m)$ を m/N の 2 次まで展開し，$W(N,m)$ が m/N に対する正規分布になることを示せ．ただし，

$$\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}\qquad (x\ll 1)$$

を用いてよい．スターリングの公式は

$$\ln n!\approx n\ln n-n\qquad (n\gg 1)$$

である.

問 6　τ と ξ が小さいとき，問 2 で導いた式を用い，$W(N+1,m)-W(N,m)$ の連続極限を取ることで，t, x に関する W の偏微分方程式を求めよ.