2024年度

東京都立大学 大学院理学研究科

物理学専攻博士前期課程夏季入学試験問題

物理学 II (100分)

2023年8月29日 (火)
13:00 〜 14:40

注意　問題 (物理学 II [1], 物理学 II [2]) ごとに答案用紙各1枚を使用し，解答は1題について1枚の答案用紙の表裏に収めよ．たとえ白紙であっても，必ず2題分の答案用紙に受験番号と氏名を記入して提出すること．

大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 II」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．ただし，h をプランク定数，$\hbar = h/(2\pi)$，$i^2 = -1$ とする．

問 1　質量 m の粒子が x 軸上を運動する 1 次元の問題を量子力学で考える．シュレディンガー方程式とポテンシャルは，$V_0 > 0$ として

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad V(x) = \begin{cases} +\infty & x \leq 0 \\ -V_0 & 0 < x < b \\ 0 & b \leq x \end{cases}$$

で与えられる．粒子のエネルギー E が $-V_0 < E < 0$ を満たす場合を考え，波数を表す変数を

$$k = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}, \quad q = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

と定義する．

1-1) シュレディンガー方程式の一般解 $\psi(x)$ を，領域 $0 < x < b$，$b \leq x$ のそれぞれで求めよ．適当な積分定数を用いて良い．

1-2) $x \to 0$ と $x \to +\infty$ での $\psi(x)$ に対する境界条件を示せ．

1-3) 一般解に 1-2) の境界条件を課し，$x = b$ での接続条件を用いて，k, q, b が満たす関係式を求めよ．

1-4) $E \to 0$ の極限で 1-3) の関係式が満たされるための最小の V_0 を求めよ．

問 2　スピン 1/2 の状態に作用するスピン演算子を $\hat{s}_j = \dfrac{\hbar}{2}\sigma_j$（$j = x, y, z$）と定義する．ただしパウリ行列は

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で与えられる．状態 $|\phi\rangle$ を

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と定義する．

2-1) 交換関係 $[\hat{s}_x, \hat{s}_z] = -i\hbar\hat{s}_y$ を示せ．

2-2) $\hat{s}_x$ を $|\phi\rangle$ に作用させ，状態 $|\phi\rangle$ が $\hat{s}_x$ の固有状態であることを確かめ，固有値を求めよ．

2-3) 状態 $|\phi\rangle$ による演算子の期待値 $\langle\phi|\,\hat{s}_x\,|\phi\rangle$，$\langle\phi|\,\hat{s}_z\,|\phi\rangle$ をそれぞれ計算せよ．

2-4) ゆらぎ（標準偏差）$\Delta_x = \sqrt{\langle\phi|\,\hat{s}_x^2\,|\phi\rangle - \langle\phi|\,\hat{s}_x\,|\phi\rangle^2}$，$\Delta_z = \sqrt{\langle\phi|\,\hat{s}_z^2\,|\phi\rangle - \langle\phi|\,\hat{s}_z\,|\phi\rangle^2}$ をそれぞれ計算せよ．

2-5) 2-1), 2-3), 2-4) の結果をもとに，スピンの x, z 成分の測定に対し状態 $|\phi\rangle$ が示す性質を以下の内容を含めて説明せよ．
「交換関係と同時固有状態」,「スピンの向きが確定している方向」,「x 成分と z 成分の測定と不確定性原理の関係」

大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学II」

[2] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．ただし，k_B をボルツマン定数，h をプランク定数，$\hbar = h/(2\pi)$ とする．

問1　底面積 S，長さ L の円筒容器に，同種の単原子分子 N 個からなる理想気体が閉じ込められている．分子1個の質量を m とし，気体は温度 T で熱平衡状態にあるものとする．なお，問1では古典統計力学を使うものとする．

1-1) この気体の内部エネルギー U と定積熱容量 C_V を求めよ．なお必要であれば以下の積分を利用すること．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

1-2) 次にこの容器を重力加速度の大きさが g の一様な重力場中に置く．重力のかかる方向は円筒軸の方向とし，$L \to \infty$ とする．

1-2-1) このときの気体の分配関数 Z が次式で与えられることを示せ．

$$Z = \frac{1}{a^{3N} N!} (2\pi m k_B T)^{3N/2} \left(\frac{S k_B T}{mg} \right)^N$$

ここで a は運動量と長さの積の次元を持つ定数である（注: a は位相空間における最小単位を表し，量子統計力学の古典極限ではプランク定数に相当する値を取る）．

1-2-2) このときの気体の定積熱容量 C_V を求めよ．

問2　相互作用のない理想フェルミ気体が温度 T の環境で熱平衡状態にある．粒子数 N とエネルギー E は，一般に状態密度 $D(\epsilon)$ とフェルミ分布関数 $f(\epsilon)$ を使って次式で表せる．

$$N = \int_0^{\infty} D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$$
$$E = \int_0^{\infty} \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$$

ここでフェルミ分布関数は

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/(k_B T)} + 1}$$

で与えられ，μ は化学ポテンシャルである．以下では，状態密度 $D(\epsilon)$ は $\epsilon \geq 0$ で定数，$\epsilon < 0$ で0とする．なお，フェルミエネルギー（絶対零度での化学ポテンシャル）を ϵ_F と書くことにする．

2-1) フェルミ分布関数 $f(\epsilon)$ の絶対零度における関数形を図に描け．なお，横軸（ϵ 軸）には，原点Oと ϵ_F の目盛りをつけること．

2-2) 理想フェルミ気体の N と E の間に $T = 0$ で次の関係が成り立つことを示せ．

$$E = \frac{1}{2} N \epsilon_F$$

2-3) 高温, 低密度の極限で, フェルミ分布関数 $f(\epsilon)$ はボルツマン分布関数 $\exp[-(\epsilon-\mu)/(k_B T)]$ に帰着する．この極限で，化学ポテンシャル μ は温度 T の関数として次式で与えられることを示せ．

$$\mu = k_B T \ln \frac{\epsilon_F}{k_B T}$$