2024年度

東京都立大学 大学院理学研究科

物理学専攻博士前期課程夏季入学試験問題

数学・物理学 I (135分)

2023年8月29日 (火)
9:30 〜 11:45

注意 問題 (数学, 物理学 I [1], 物理学 I [2]) ごとに答案用紙各1枚を使用し，解答は1題について1枚の答案用紙の表裏に収めよ．たとえ白紙であっても，必ず3題分の答案用紙に受験番号と氏名を記入して提出すること．

大学院博士前期課程夏季入学試験問題「数学」

以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問 1　次の偏微分方程式を考える．

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\phi(r,t)\right]-\frac{\partial}{\partial t}\phi(r,t)=0 \tag{1}$$

$\phi(r,t)$ は実数 r, t を変数とする実関数で，$r>0$, $t\geq 0$ とする．

1-1) $\phi(r,t)$ が r の関数 $R(r)$ と t の関数 $T(t)$ の積として以下のように書けるものとする．

$$\phi(r,t)=R(r)T(t)$$

$R(r)$, $T(t)$ を用いて式 (1) を変形し，左辺が r のみの関数, 右辺が t のみの関数となるようにせよ（変数分離）．

1-2) 1-1) の答えの両辺はある共通の定数となることを利用し，$T(t)$ を t の関数として求めよ．ただし $t=0$ で $T=1$, $\dfrac{dT}{dt}=-1$ とする．

1-3) 1-1), 1-2) の答えを使い，$R(r)$ を r の関数として求めよ．ただし $r\to 0$ で $R(r)\to 1$ とする．必要であれば $R(r)$ がある関数 $S(r)$ を用いて $R(r)=\dfrac{S(r)}{r}$ と書けることを使ってよい．

問 2　以下の積分に関する問いに答えよ．

2-1) 留数定理を用いて次の実積分を計算せよ．

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{(k^2+m^2)(k^2+M^2)}$$

ただし m, M は実数で $M>m>0$. さらに k は実数とする．

実数の直交座標 (k_1,k_2,k_3) で定義された次の 3 重積分を考える．

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dk_1\int_{-\infty}^{+\infty}dk_2\int_{-\infty}^{+\infty}dk_3\frac{\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})}{(k^2+m^2)(k^2+M^2)} \tag{2}$$

ただし $\vec{k}=(k_1,k_2,k_3)$, $k=|\vec{k}|$, $\vec{r}$ は実数成分のベクトル，m, M は実数で $M>m>0$ とする．以下 $r=|\vec{r}|$, $i^2=-1$ とする．

2-2) ベクトル $\vec{r}$ の方向を角度 θ の基準 $(\theta=0)$ とし，ベクトル $\vec{r}$ の周囲に角度 ϕ を定める $(\phi=0$ の向きは任意). このときベクトル $\vec{k}$ と $\vec{r}$ のなす角度は θ である．式 (2) をこの極座標 (k,θ,ϕ) での積分として表しなさい．k の積分区間は 0 から $+\infty$, θ の積分区間は 0 から π, ϕ の積分区間は 0 から 2π とする．

2-3) 2-2) で表した積分を θ, ϕ について積分することで，k のみの積分にしなさい．

2-4) 2-3) で表した積分を k について積分することで，式 (2) の積分を求め，r, M, m を用いて表しなさい．

大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 I」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．なお，重力と相対論的効果は無視する．

問 1　水平な x 軸上を運動することができる質量 m の質点がある．以下の 2 つの場合の質点の運動についてそれぞれ答えよ．

1-1) 質点の速さが v のときに大きさ $k_1 v$ の抵抗力がはたらく．ここで k_1 は正の定数とする．時刻 $t=0$ のとき位置 $x=0$ で静止していた質点を，速さ v_0 まで加速させるため，抵抗力とは別に，大きさ $2k_1 v_0$ の一定の外力を質点に加えた．外力の向きは x 軸正方向とする．質点の速さが v_0 になった時刻と，この外力が質点に与えた仕事の大きさを求めよ．

1-2) 質点の速さが v のときに大きさ $k_2 v^{1/2}$ の抵抗力がはたらく．ここで k_2 は正の定数とする．質点が，時刻 $t=0$，位置 $x=0$ において速さ v_0 で x 軸正方向にはなたれた．質点が停止する位置と時刻を求めよ．また，質点がはなたれてから停止するまでの速さと時刻との関係の概略を，縦軸を速さ，横軸を時刻としてグラフで示せ．

問 2　図 1 のような短辺が a で長辺が b の長さを持つ均一で薄い長方形の板の剛体がある．この剛体が, xy 平面に置かれ, 長方形の対角線の交点は常に座標原点 O にあり，z 軸を軸として xy 平面上で自由に回転できる．図 1 のように剛体の長辺と x 軸となす角度が $\frac{2\pi}{3}$ となる位置で，剛体を静止させた．

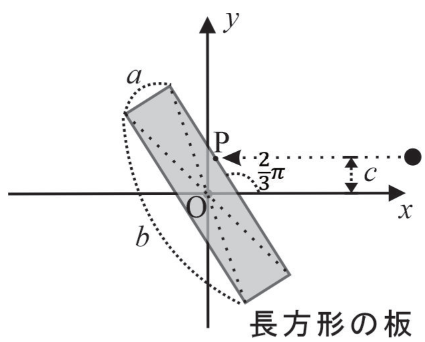

図 1

2-1) 剛体の z 軸の周りの慣性モーメント I を求めよ．ここで剛体の面密度を σ とする．

以下，この剛体の慣性モーメントを I として表記してよい．ここで，x 軸から距離 c だけ離れ，x 軸と平行に運動する質量 m の質点を速さ v で剛体に衝突させた．ここで c は正の定数とする．図のように質点が剛体に衝突する位置を点 P とする．質点の運動は xy 平面上に限られるとする．

2-2) 質点が衝突する点 P の座標を求めよ．

2-3) 質点の衝突が完全弾性的であり，かつ，板と質点の間の摩擦は無視できるとする．この場合，質点が衝突しても剛体が回転しないときの c を求めよ．摩擦がないため質点から剛体に与えられる力積は，長辺に垂直な成分だけであることに注目すること．

2-4) 質点が衝突後，衝突点において剛体と一体となり運動した．この場合，点 P の座標を (x_0, c) として，衝突後の剛体の角速度の大きさを求めよ．

大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 I」

[2] 全てが真空中にあるとして，以下の問いに答えよ．答えは結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．なお，真空の誘電率，透磁率をそれぞれ ε_0，μ_0，真空中の光速度を c とする．

問 1　図 2 に示されるような，半径 a および b $(a < b)$ の同軸で充分に長い 2 本の金属円筒について，以下の 3 つの場合について考える．ただし，円筒の厚さ，抵抗，および円筒の端の効果は無視できるものとする．

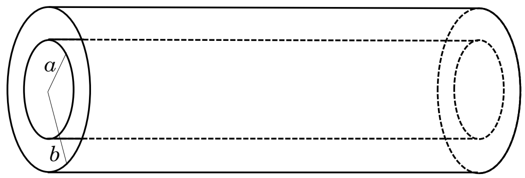

図 2

1-1) 内側と外側の円筒表面に，それぞれ面密度 σ_a および σ_b の正電荷が一様に分布している場合，生じる電場 $\boldsymbol{E}$ の大きさと向きを中心軸からの距離を r として，$r < a$，$a < r < b$，$r > b$ の 3 つの領域について求めよ．

1-2) 内側と外側の円筒に，同じ強さの電流 I を軸方向に互いに逆向きに，それぞれ一様な電流密度で流した場合に生じる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の大きさを，1-1) と同じ 3 つの領域について求めよ．

1-3) 円筒の両端で 2 つの円筒を短い導線で接続して閉回路をつくる．この回路の単位長さ当たりの自己インダクタンス L を求めよ．

問 2　電荷も電流もない真空中における Maxwell 方程式は，次のように与えられる．

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \quad \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

ただし，$\boldsymbol{E}$ は電場，$\boldsymbol{D}$ は電束密度，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度，$\boldsymbol{H}$ は磁場である．

2-1) $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$ の関係，および $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ の関係を，それぞれ示せ．

2-2) 与えた Maxwell 方程式から，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に関する波動方程式を導け．なお，任意のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ について成り立つ次の公式を用いてよい．

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F}) = -\nabla^2\boldsymbol{F} + \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})$$

2-3) 電場が x 軸方向，磁場が y 軸方向にそれぞれ振動し，伝搬が z 軸方向である電磁波 (平面波) は，電場ベクトル $\boldsymbol{E}=(E_x, E_y, E_z)$ および磁束密度ベクトル $\boldsymbol{B}=(B_x, B_y, B_z)$ の各成分が次のように表せる．ただし E_0, B_0, k, ω は正の定数である．

$$E_y(z,t) = E_z(z,t) = 0, \quad B_x(z,t) = B_z(z,t) = 0,$$

$$E_x(z,t) = E_0\cos(kz-\omega t), \quad B_y(z,t) = B_0\cos(kz-\omega t)$$

$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ の関係に注意して，電場と磁束密度の振幅の比 E_0/B_0 を，k，ω，c の中から 1 つの記号を用いて示せ．

2-4) 上述の平面波の時間平均した電場のエネルギー密度 u_E と磁場のエネルギー密度 u_B を求めよ．また，$u_E=u_B$ であることを示せ．