2024年度

東京都立大学 大学院理学研究科

物理学専攻博士前期課程冬季入学試験問題

数学・物理学 I (70分)

2024年2月7日 (水)
9:30 〜 10:40

注意　問題 (数学 [0], 物理学 I [1], 物理学 I [2]) ごとに答案用紙各1枚を使用し，解答は1題について1枚の答案用紙の表裏に収めよ．たとえ白紙であっても，必ず3題分の答案用紙に受験番号と氏名を記入して提出すること．

大学院博士前期課程冬季入学試験問題「数学」

[0] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問 1　次の級数展開式を考える．

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(x)\frac{t^k}{k!} \tag{1}$$

式 (1) や，その両辺を t について微分した式に $t=0$ を代入することで，級数係数 $E_0(x)$, $E_1(x)$, $E_2(x)$ を求めよ．なお，$0!=1$ である．

問 2　次の行列 A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2-1) A のすべての固有値を求めよ．

2-2) A の最大の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの長さは 1 となるようにせよ．

問 3　次の複素積分を求めよ．ただし，$i^2=-1$ とする．

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

ただし，積分経路 C は，複素平面上の原点を中心とする半径 1 の円 ($|z|=1$) で，向きは反時計回りである．

ヒント：被積分関数を級数展開し，留数定理を適用する．

大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 I」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．重力加速度の大きさを g とする．

水平となす角度が θ の粗い斜面がある．角度 θ は自由に調整ができ，斜面は十分に長いとする．図のように斜面に沿って最大傾斜下向きに x 軸を鉛直面内にとる．半径 a，質量 M の一様な薄い円板を，その面が鉛直面に平行になるように斜面に置く．

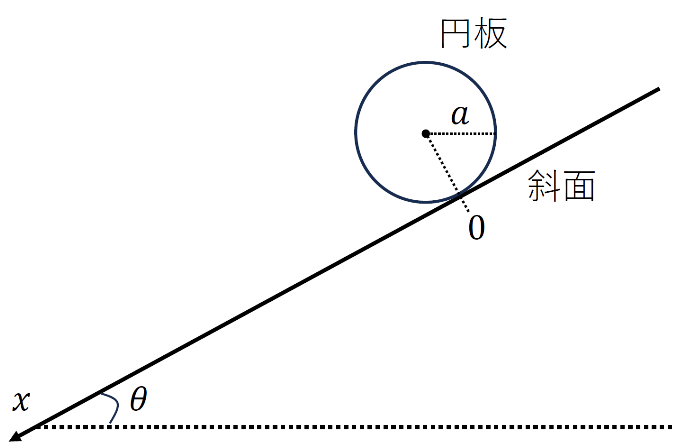
問 1　この円板の重心まわりの慣性モーメントを求めよ．

以下では円板の慣性モーメントを I とする．時刻 $t=0$ に斜面に置かれた円板から静かに手を放した．この瞬間の円板の重心の x 座標は $x=0$ である．この円板が滑らずに斜面を回転して運動する場合を考える．円板は斜面に沿って運動し，その面は常に鉛直面に平行である．斜面の静止摩擦係数を μ とする．

問 2　時刻 $t_1\ (>0)$ のときの円板の重心の速さを求めよ．

問 3　円板の重心の x 座標が $x=L\ (>0)$ となったときの，円板の運動エネルギーと回転エネルギーの和を求めよ．

問 4　円板が斜面を滑らずに転がることが可能な斜面の最大の角度を β としたとき，$\tan\beta$ の値を求めよ．



大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 I」

[2] 以下の問いに答えよ．答えは結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．なお，真空の誘電率を ε_0 とする．

真空中において，原点に点電荷があり，原点以外にも空間に電荷が分布している系を考える．原点からの距離を r (> 0) としたとき，静電ポテンシャルが次式で与えられている．ただし，A および k は正の定数である．

$$\phi(r) \ = \frac{A}{r}\exp(-kr)$$

問 1　上記のポテンシャルから，原点以外での電場の大きさ $E(r)$ を求めよ．

問 2　原点を中心とする半径 R の球面に積分形の Gauss の法則を適用し，$R \to 0$ の極限を取ることで，原点にある点電荷の大きさ q を求めよ．

問 3　極座標系における Poisson の方程式を用いて，原点以外の空間に分布する電荷の密度 $\rho(r)$ を求めよ．ただし，球対称な系に適用される次の関係式を用いてよい．

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}$$

問 4　問 3 で求めた電荷密度 $\rho(r)$ を原点以外の全空間で積分した電荷量を求め，原点にある点電荷の大きさ q を用いて表せ．