2024年度

東京都立大学 大学院理学研究科

物理学専攻博士前期課程冬季入学試験問題

物理学 II (50分)

2024年2月7日 (水)
11:00 〜 11:50

注意 問題 (物理学 II [1], 物理学 II [2]) ごとに答案用紙各1枚を使用し，解答は1題について1枚の答案用紙の表裏に収めよ．たとえ白紙であっても，必ず2題分の答案用紙に受験番号と氏名を記入して提出すること．

大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 II」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．ただし，h をプランク定数，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$，$i^2 = -1$ とする．

1 次元調和ポテンシャル中を運動する質量 m の量子力学的粒子を考える．ハミルトニアンは，位置演算子を $\hat{x}$，運動量演算子を $\hat{p}$，角振動数を ω（> 0）として

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

で与えられる．演算子 $\hat{a}$，$\hat{N}$ を

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{1}{m\omega}\hat{p}\right), \quad \hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$$

と定義する．演算子 $\hat{N}$ の固有値 λ を持つ固有状態を $|\lambda\rangle$ とする．ただし，λ は 0 以上の整数である．

問 1　演算子の座標表示 $\hat{x} = x$，$\hat{p} = -i\hbar\dfrac{d}{dx}$ を用いて交換子 $[\hat{x}, \hat{p}]$ を計算せよ．

問 2　交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を示せ．

問 3　交換子 $[\hat{N}, \hat{a}]$ を計算し，$\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ の中から適切なものを使って書け．

問 4　$\lambda \geq 1$ の場合，状態 $\hat{a}\,|\lambda\rangle$ が固有値 $\lambda - 1$ を持つ $\hat{N}$ の固有状態であることを示せ．

問 5　$\hat{N}$ の固有値が最小の状態は，$\lambda = 0$ の状態 $|0\rangle$ で与えられる．$\langle 0|\hat{x}|0\rangle$ を $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ を用いて計算せよ．

問 6　座標表示の基底状態の波動関数 $\psi_0(x)$ は $\hat{a}\psi_0(x) = 0$ を満たす．$\psi_0(x)$ を求めよ．ただし，波動関数を規格化する必要はない．

大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 II」

[2] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく, 求め方や計算の過程も示すこと．

つねに熱平衡状態にあるぴんと張られたゴム糸を考える．ゴム糸にかかる張力の大きさを X とし，ゴム糸の長さ L を ΔL だけ断熱的に変化させたときの内部エネルギー U の増加分を $X\Delta L$ とする．また，ゴム糸のエントロピーを S とする．長さ L を一定に保ったときの張力の温度依存性は $X = AT$ である．ここで T は絶対温度，A は正の実定数である．

問 1　ゴム糸のヘルムホルツの自由エネルギー $F(T, L) = U - TS$ の全微分 dF が

$$dF = XdL - SdT$$

と書けることを示せ.

問 2　問 1 の式を用いて $\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_L$ および $\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_T$ を計算せよ.

問 3　温度一定のもとでゴム糸を伸ばすとエントロピーが減少する．すなわち，$\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T < 0$ である．この式が成り立つことを示せ.

問 4　温度一定のもとでは内部エネルギーがゴム糸の長さによらない．すなわち，$\left(\frac{\partial U}{\partial L}\right)_T = 0$ である．$U = F + TS$ に問 2 の結果を用いることで，この式が成り立つことを示せ.

問 5　断熱的にこのゴム糸を伸ばすと，ゴム糸の温度が上昇すること，すなわち，$\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_S > 0$ を示せ．なお，ゴム糸の定積熱容量（長さを一定に保ったときの熱容量）は正の値であるとする.