

2025年度

東京都立大学 大学院理学研究科

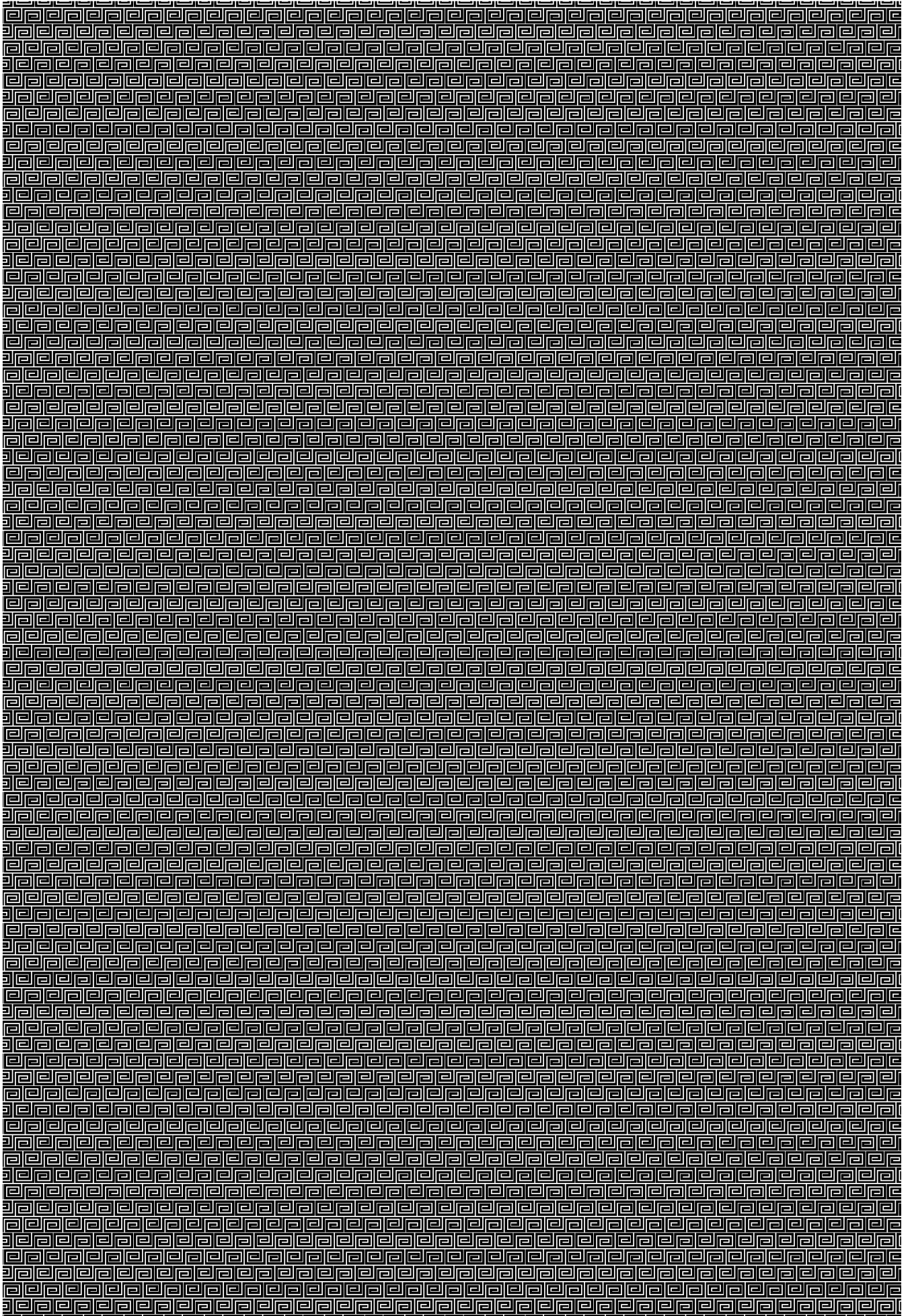
物理学専攻博士前期課程夏季入学試験問題

数学・物理学 I (135 分)

2024 年 8 月 27 日 (火)

9:30 ～ 11:45

注意 問題 (数学, 物理学 I [1], 物理学 I [2]) ごとに答案用紙各 1 枚を使用し, 解答は 1 題について 1 枚の答案用紙の表裏に収めよ. たとえ白紙であっても, 必ず 3 題分の答案用紙に受験番号と氏名を記入して提出すること. 答案用紙には受験科目 (数学/物理学 I), 問題番号 ([1]/[2]/数学は空欄) を記入すること.



大学院博士前期課程夏季入学試験問題「数学」

以下の問いに答えなさい。結果だけでなく、求め方や計算の過程も示すこと。

複素変数 $z = e^{i\theta}$ を考える。ここで $i^2 = -1$ であり、また θ は実変数である。

問1 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ を z の関数で表しなさい。ただし、ここで複素共役 z^* を使わずに表すこと。

問2 積分,

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i3\theta}}{2 - \sin \theta} d\theta$$

を、問1の結果を使って、

$$\oint_C f(z) dz$$

の形に書き表し、 $f(z)$ を求めなさい。ここで、 C は複素平面上の $|z|^2 = 1$ で定義される閉曲線であり、反時計回りを正の向きとして積分するものとする。

問3 閉曲線 C の内側に含まれる $f(z)$ の極を求めなさい。

問4 問2と問3の結果から、留数定理を用いて、次の積分の値を求めなさい。

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 3\theta}{2 - \sin \theta} d\theta$$

大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 I」

[1] 以下の問いに答えなさい。答えは結果だけでなく、求め方や計算の過程も示すこと。ばねは軽く、自然長は ℓ で、ばね定数は k である。ばねの変位は十分小さいとする。ばね以外の力は無視でき、運動は全て x 軸上の一次元のものとする。時刻 t についての任意の関数 $f(t)$ に対して $\dot{f}(t) = \frac{d}{dt}f(t)$ を定義する。

問 1 図 1 に示すように、それぞれ質量 m_1, m_2 の質点 1, 2 がばねによって繋がれている。

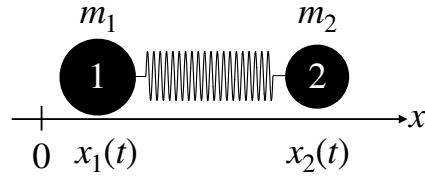


図 1

1-1) 時刻 t における質点 1, 2 の座標をそれぞれ $x_1(t)$ と $x_2(t)$ とし、それらの従う運動方程式を求めなさい。ただし、 $x_2(t) > x_1(t)$ である。

1-2) 重心質量 $M = m_1 + m_2$, 換算質量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, 重心座標 $X(t) = \frac{1}{M}(m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t))$, 相対座標 $x_{\text{rel}}(t) = x_2(t) - x_1(t)$ としたとき、 $x_{\text{rel}}(t)$, $X(t)$ に対する運動方程式の一般解を求めなさい。

以下では、質点の質量は $m_1 = 3m$, $m_2 = m$ とする。

1-3) 時刻 $t < 0$ で、質点 1, 2 はそれぞれ座標 $x = 0, \ell$ に静止していた。 $t = 0$ に質点 1 に小さな撃力を加えた。その結果、瞬時に $\dot{x}_1(0) = v(> 0)$, $\dot{x}_2(0) = 0$ となった。 $t > 0$ における $X(t)$, $x_{\text{rel}}(t)$ を t の関数として求めなさい。

1-4) 1-3) の撃力により運動するうちにばねが突然切れた。切れる瞬間のばねの長さは ℓ' であり、切れたことにより、蓄えられたばねの弾性エネルギーは全て熱に変わった。ばねが切れた直後の $\dot{X}$, $\dot{x}_{\text{rel}}$ を求めなさい。

問2 図2に示すように, 無限個の質量 m の質点がばねによって繋がれている.

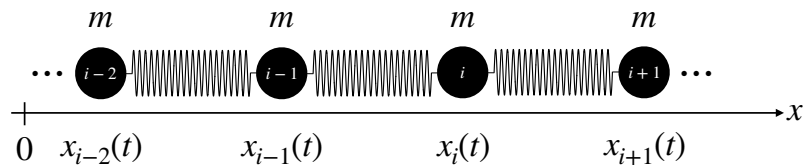


図2

質点 i は質点 $i \pm 1$ とのみ繋がれている. ここで, i は整数である.

2-1) 時刻 t における質点 i の座標 $x_i(t)$ の従う運動方程式を求めなさい. ただし, $x_{i \pm 1}(t)$ が方程式に含まれても良い.

2-2) 質点 i の位置を $x_i(t)$ の代わりに $\varphi(x, t)$ で表すことにする. ここで, $x = i\ell$ である. このとき, 隣り合う質点間の距離を ℓ で割った $(x_{i+1} - x_i)/\ell$ は, ℓ を十分小さく取ると, $\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, t)$ で近似されることを示しなさい.

2-3) 2-2) と同様に, ℓ を十分小さく取ると, 2-1) の運動方程式は以下の波動方程式で近似されることを示しなさい.

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x, t) = k \ell^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x, t)$$

2-4) 2-3) の波動方程式における, 波の伝わる速さを求めなさい.

大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学I」

[2] 全てが真空中にあるとして以下の問いに答えなさい。答えは結果だけでなく、求め方や計算の過程も示すこと。ただし、真空の誘電率、透磁率をそれぞれ ε_0 , μ_0 とする。

問1 静電ポテンシャル $\phi(r)$ が次の式で与えられるとする。ここで λ と C は正の定数, r ($r > 0$) は z 軸からの距離とし $\phi(r)$ は z によらないとする。

$$\phi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{C}{r}\right)$$

1-1) $\phi(r) = 0$ となる距離 r を求めなさい。

1-2) 電場 $\vec{E}(r)$ の大きさを求めなさい。

1-3) $\vec{\nabla} \times \vec{E}(r)$ を求めなさい。

問2 図3のように、電気抵抗 R と自己インダクタンス L を持った回路に、起電力 V の外部電源をスイッチ操作で入れたり切ったりできるようにつないだ。

2-1) 回路に電流が流れていない状態から、時刻 $t = 0$ にスイッチを A 側につないだ。電流を $I(t)$ とし、 $I(t)$ の満たす微分方程式を求めなさい。

2-2) 2-1) で求めた微分方程式を解き、 $I(t)$ を求めなさい。また縦軸を電流 I 、横軸を t として電流 $I(t)$ の概形をグラフに描きなさい。このとき $t \rightarrow \infty$ で $I(t)$ が漸近する値をグラフに書き入れること。

2-3) つぎに、スイッチを A につないでから十分に時間が経過した状態から、スイッチを B 側につないだ場合を考える。スイッチを B 側につないだ瞬間からの時間を t' とするとき $t' > 0$ における電流 $I(t')$ を V, R, L, t' を用いて表しなさい。

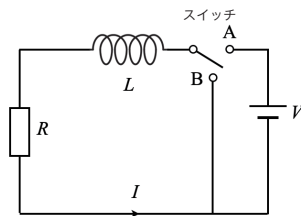


図3

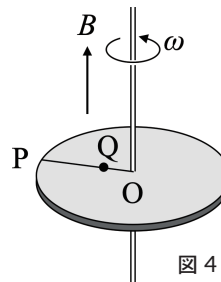


図4

問3 図4のように半径 a 、厚さ d 、電気伝導率 σ の一様な導体の円板があり、その面に対し垂直上向きに磁束密度の大きさ B の一様な磁場がかかっている。導体円板は中心 O を通る細い導体棒に垂直に固定されている。この導体棒を軸に、円板を回転させると、中心 O と円板の縁の点 P の間に誘導起電力が生じる。円板は回転軸の上から見て反時計回りに回転しており、角速度の大きさを ω とする。円板の表面や導体棒、自己インダクタンスの効果は無視できるものとする。

3-1) 中心 O と点 P の間の電位差を求めなさい。

つぎに、導体円板の縁全体が等電位面となるように電極を縁全体に接触させ、その電極と中心 O を通る導体棒を導線を用いて接続すると、電流が円板の中心から放射状に流れた。このとき導線を通る電流の大きさを I とする。ただし、この電流がつくる磁場の影響は無視できるものとする。

3-2) 導体円板の中心から距離 r ($0 < r < a$) の位置における電流密度を I, d, r を用いて答えなさい。

3-3) 導体円板の中心から距離 r ($0 < r < a$) の点 Q と点 P との間の電位差を σ, I, d, r, a を用いて答えなさい。

