2025年度

東京都立大学 大学院理学研究科

物理学専攻博士前期課程夏季入学試験問題

物理学 II (100分)

2024年8月27日 (火)
13:00 〜 14:40

注意　問題 (物理学 II [1], 物理学 II [2]) ごとに答案用紙各1枚を使用し，解答は1題について1枚の答案用紙の表裏に収めよ．たとえ白紙であっても，必ず2題分の答案用紙に受験番号と氏名を記入して提出すること．答案用紙には受験科目（物理学 II），問題番号（[1]/[2]）を記入すること．

大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 II」

[1] 以下の問いに答えなさい．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．ただし，h をプランク定数，$\hbar = h/(2\pi)$，$i^2 = -1$ とする．

問 1 xy 面内に閉じ込められた質量 m，電荷 $-e$ の電子に対し，z 軸方向に磁束密度の大きさ $B(>0)$ の磁場，x 軸方向に大きさ $E(>0)$ の電場がかけられているとする．この電子のハミルトニアンは

$$H = \frac{(\vec{p}+e\vec{A})^2}{2m} + eEx$$

と書ける．ここで $\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ は電子の運動量演算子であり，$\vec{A} = (0, Bx, 0)$ はベクトルポテンシャルである．この電子の最低固有エネルギー ε_0 を以下の手順で求める．

1-1) 電子の波動関数を $\Psi_k(x, y) = e^{iky}\phi_k(x)$ とおくと，$\phi_k(x)$ が満たす時間に依存しないシュレディンガー方程式は

$$H'_k\phi_k(x) = \varepsilon\phi_k(x)$$

と書ける．ここで H'_k は $\phi_k(x)$ に対するハミルトニアン，ε は固有エネルギーである．H'_k は，定数項を含んだ 1 次元調和振動子のハミルトニアンの形に整理できることを示しなさい．

1-2) 一般に，角振動数 ω で単振動する粒子を表す 1 次元調和振動子のシュレディンガー方程式の固有エネルギーは，0 以上の整数 n を使って $\hbar\omega(n + 1/2)$ と表せる．1-1) のハミルトニアン H'_k が表す 1 次元調和振動子の角振動数を求めなさい．また，ε_0 を求めなさい．

問 2 軌道角運動量演算子 $\hbar\vec{L}$ は $\hbar\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ で定義される．ここで $\vec{r}$ は 3 次元座標演算子，$\vec{p}$ は 3 次元運動量演算子であり $\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ と書ける．

2-1) $\vec{L}$ の 3 つの成分 (L_x, L_y, L_z) に対して次の交換関係を示しなさい．

$$[L_x, L_y] = iL_z$$

次に，軌道角運動量演算子 $\hbar\vec{L}$ とスピン角運動量演算子 $\hbar\vec{S}$，および全角運動量演算子 $\hbar\vec{J} = \hbar\vec{L} + \hbar\vec{S}$ を考える．$\vec{J}$ の固有関数を基底に取り，$\vec{L}^{\,2}$，$\vec{S}^{\,2}$, $\vec{J}^{\,2}$ の固有値をそれぞれ $l(l+1)$, $s(s+1)$, $j(j+1)$ とする．ここで l, s, j は正の整数である．

2-2) $\vec{L}\cdot\vec{S}$ の固有値を l, s, j を用いて書きなさい．

$\hbar\vec{L}$ と $\hbar\vec{S}$ を持つ電子の磁気モーメントは $\vec{L} + 2\vec{S}$ に比例する．$\vec{L} + 2\vec{S}$ を $\vec{J}$ に平行な成分および直交する成分に分けて書くと，係数 g を用いて

$$\vec{L} + 2\vec{S} = g\vec{J} + \vec{J}_\perp$$

となる．$\vec{J}_\perp$ は $\vec{J}$ と直交する演算子である．

2-3) $\vec{L} + 2\vec{S}$ と $\vec{J}$ との内積をとったうえで次の式を示しなさい．

$$\frac{3}{2}\vec{J}^{\,2} - \frac{1}{2}\vec{L}^{\,2} + \frac{1}{2}\vec{S}^{\,2} = g\vec{J}^{\,2}$$

2-4) g を l, s, j を用いて表しなさい．

大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学 II」

[2] 以下の問いに答えなさい．結果だけでなく, 求め方や計算の過程も示すこと．図１は，圧力，温度に関する水の相図を表している．以下では，T は絶対温度，S はエントロピー，p は圧力，V は体積，μ は化学ポテンシャル，N は水の全分子数とする．

圧力 p_0，温度 T_0 で系全体が液体であった．圧力を一定に保ったまま，温度をわずかに上昇させたところ，系全体が気体に変化した．

問 1 内部エネルギー U の全微分が $dU = TdS - pdV + \mu dN$ と書けることを用いて，ギブズの自由エネルギー $G = U - TS + pV$ の全微分を求めなさい．

問 2 温度変化はわずかであるため，系全体のギブズの自由エネルギー変化は０として良い．液体のエントロピーを S_l，気体のエントロピーを S_g とするとき，エンタルピー $H = U + pV$ の変化量を求めなさい．

問 3 このエンタルピーの変化量は何と呼ばれているか，答えなさい．

共存線上では液体と気体が共存し，液体の圧力と温度は気体の圧力と温度にそれぞれ等しい．また，系全体のギブズの自由エネルギーは，液体と気体のギブズの自由エネルギーの和となる．ここで，液体と気体の１分子あたりのエントロピーをそれぞれ s_l，s_g，１分子あたりの体積をそれぞれ v_l，v_g，化学ポテンシャルをそれぞれ μ_l，μ_g とする．

問 4 共存線上では $\mu_l = \mu_g$ であることを示しなさい．

問 5 ある共存状態から共存線に沿って，圧力を dp，温度を dT だけ変化させた．このとき，気体の分子数の変化量と液体の分子数の変化量は無視できるとして，dp/dT を求めなさい．

液体と固体の共存線の傾き dp/dT は，液体と気体の共存線の傾きと同様に計算できる．水では，液体と固体の共存線の傾きは $dp/dT < 0$ である．

問 6 富士山の山頂では，固体の融点はどうなるか，以下の中から１つ選び，記号で答えなさい．
（ア）摂氏０度　（イ） 摂氏０度より低い　（ウ）摂氏０度より高い

問 7 液体と固体の共存線が $dp/dT < 0$ となる理由について，簡単に述べなさい．ただし，１分子あたりのエントロピーは液体より固体の方が小さい．

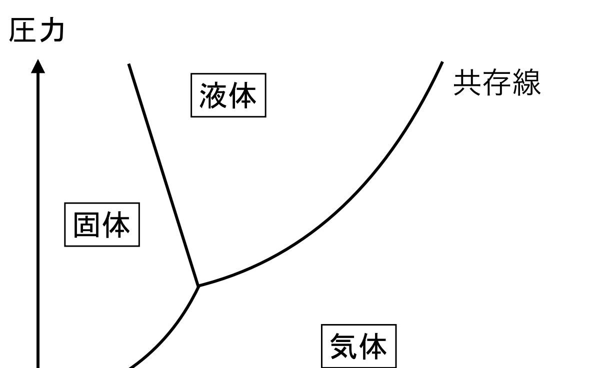

図１