2025年度

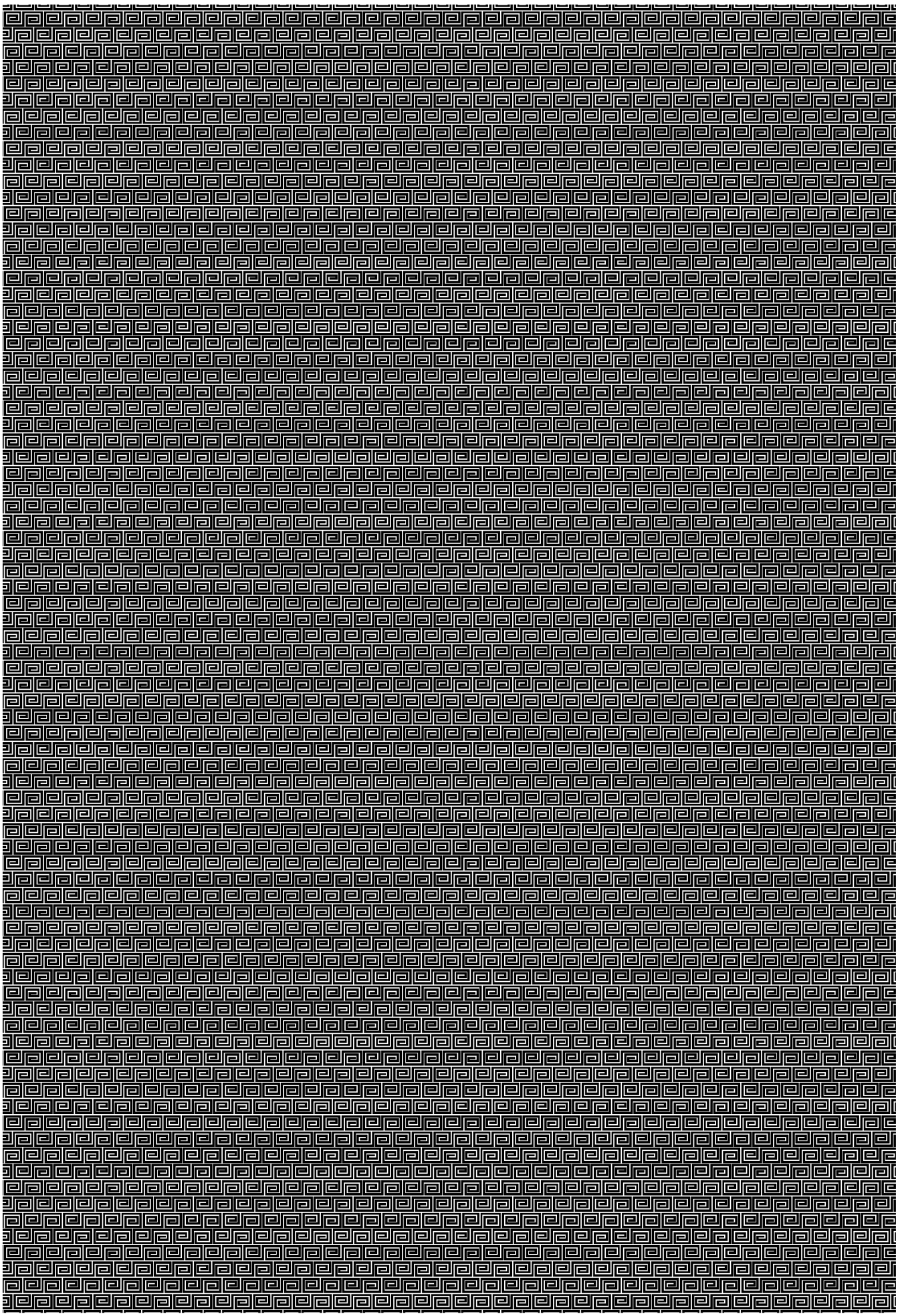
東京都立大学 大学院理学研究科

物理学専攻博士前期課程冬季入学試験問題

数学・物理学 I (70分)

2025年2月4日 (火)
9:30 〜 10:40

注意　問題 (数学, 物理学 I [1], 物理学 I [2]) ごとに答案用紙各1枚を使用し，解答は1題について1枚の答案用紙の表裏に収めなさい．たとえ白紙であっても，必ず3題分の答案用紙に受験番号と氏名を記入して提出すること．



大学院博士前期課程冬季入学試験問題「数学」

以下の問いに答えなさい．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．

問 1 次の行列

$$M = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$$

を考える．

1-1) この行列 M の固有値 λ_1 および λ_2 を求めなさい．ここで $\lambda_1 > \lambda_2$ とする．

1-2) 次の条件を満たす行列 U における θ を全て求めなさい．ここで θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする．

$$U^{-1}MU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ここで

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である．

問 2 ベクトル $\vec{r} = (x, y, z)$ および $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とし，関数 $f(r) = \log r$ を $r > 0$ の範囲で考える．ここで log は自然対数とする．

2-1) $\vec{\nabla} f(r) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ を求めなさい．ここで $\vec{r}$ と r のみを用いて答えること．

2-2) $\Delta f(r) = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) f(r)$ を求めなさい．ここで r のみを用いて答えること．

問 3 次の不定積分を求めなさい．

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

ここで $u = \tan(x/2)$ とおくとよい．

大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 I」

[1] 以下の問いに答えなさい. 答えは結果だけでなく, 求め方や計算の過程も示すこと.

図 1 に示すように, 振動する板と質量 m の質点がばねによって繋がれている. ばねは軽く，自然長は ℓ で，ばね定数は k である. 板は振動数 w で振動させている. ばねの伸縮は十分小さい場合のみを考える. 質点に対するばね以外の力は無視でき，運動は全て x 軸上の一次元のものとする.

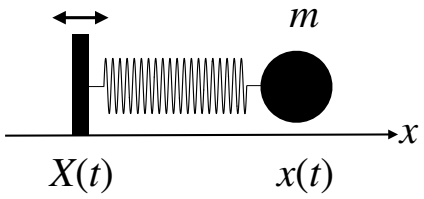


図 1

問 1 時刻 t における質点と板の座標をそれぞれ $x(t)$ と $X(t)$ とし，質点の従う運動方程式を求めなさい.

問 2 $X(t) = A\sin(wt), x(0) = \ell, \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$ として, 質点の従う運動方程式の解 $x(t)$ を求めなさい. ここで, A, w は正の数であり, $w \neq \sqrt{\frac{k}{m}}$ とする.

問 3 問 2 の解 $x(t)$ において，$w = \sqrt{\frac{k}{m}} + \epsilon$ とおき, $\epsilon \to 0$ の極限を取ることで，共鳴が起こる場合の $x(t)$ を求めなさい. また $x(t) - \ell$ の $t \geq 0$ における挙動を概略図として表しなさい.

大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 I」

[2] 以下の問いに答えなさい．答えは結果だけでなく，計算の過程も示すこと. ただし，真空の誘電率，透磁率をそれぞれ ε_0，μ_0 とする．

問 1 図 2 のように接地された無限に広い導体が $z < 0$ の領域にある．この導体表面にある原点 O から距離 h の z 軸上に正の電荷 q が置かれているとする．$z \geq 0$ は真空とし, この領域における静電ポテンシャルは位置ベクトルを $\vec{r} = (x, y, z)$ とすると，以下で与えられる．

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}}\right]$$

1-1) $z = 0$ における電場の向きとその理由を答えなさい.

1-2) 位置 $\vec{r}$（ただし $z \geq 0$） における電場 $\vec{E}(\vec{r})$ の z 成分 E_z を求めなさい.

1-3) $r = |\vec{r}|$ とし，導体表面に誘導された電荷の面密度を $\sigma(r)$ とすると，導体表面において $E_z(r) = \sigma(r)/\varepsilon_0$ の関係が成り立つ．この $\sigma(r)$ を用いて, 導体表面に誘導された電荷の総和を求めなさい．ここで計算の途中式を省略せずに示すこと.

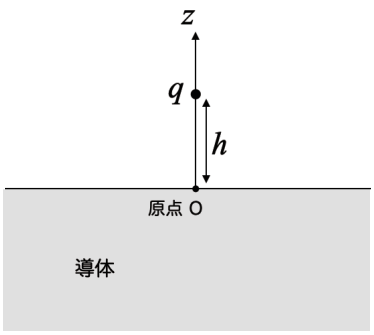


図 2

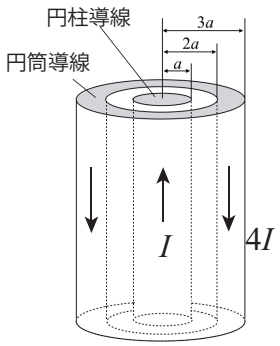
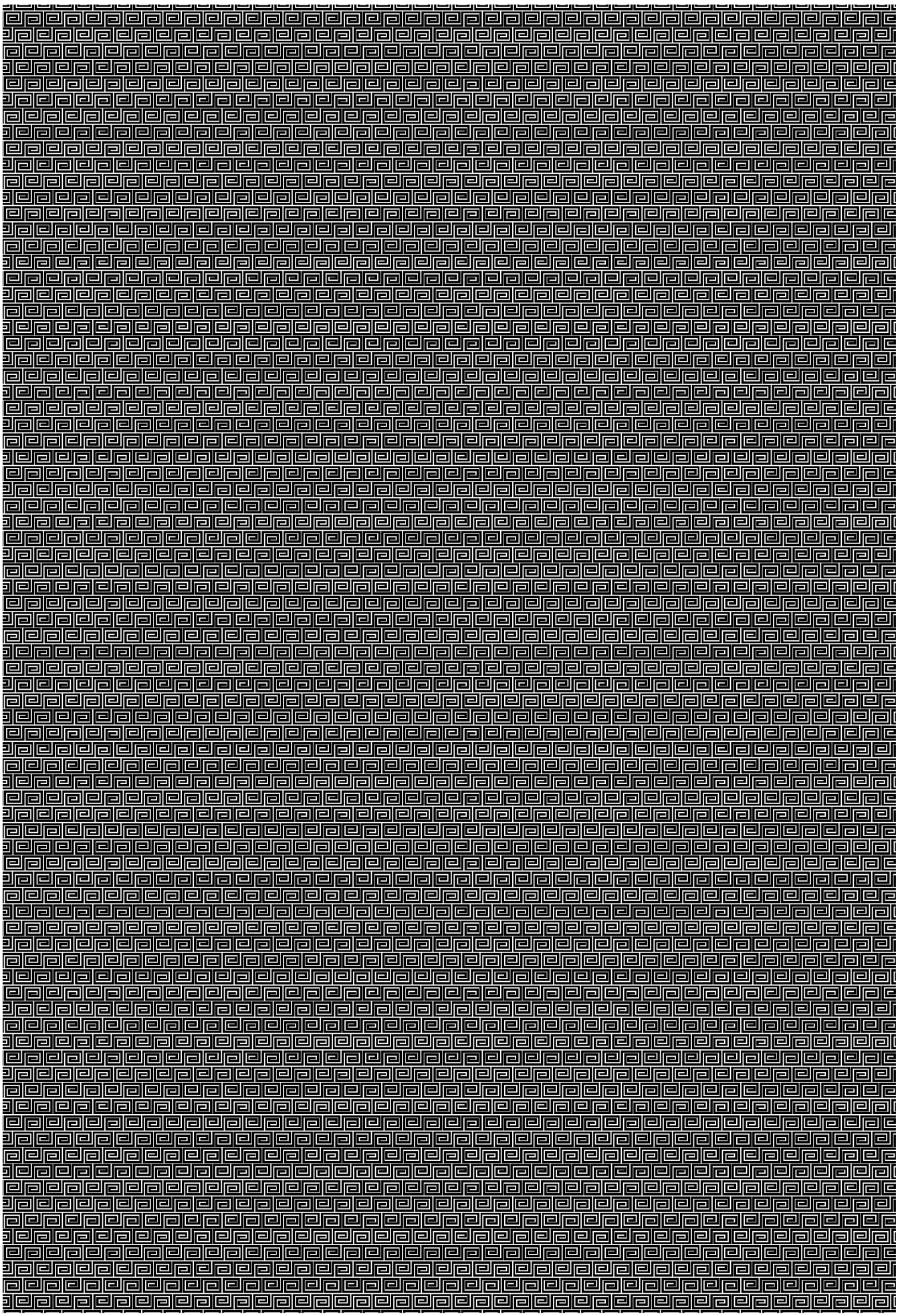


図 3

問 2 図 3 のように，半径 a の円柱導線と, 内径 $2a$, 外径が $3a$ の円筒導線が真空中にある．それぞれの導線は十分に長く, また中心軸は一致しているものとする． 円柱導線には大きさ I の電流が上向きに, また円筒導線には大きさ $4I$ の電流が下向きにそれぞれ一様に流れている.

2-1) 円柱導線・円筒導線それぞれの電流密度の大きさを答えなさい.

2-2) 中心軸からの距離を r としたときの，円柱導線・円筒導線それぞれの内部の磁束密度の大きさ $|\vec{B}(r)|$ を答えなさい．ここで 導線内の透磁率は μ_0 として良い.