

2026 年度

東京都立大学 大学院理学研究科

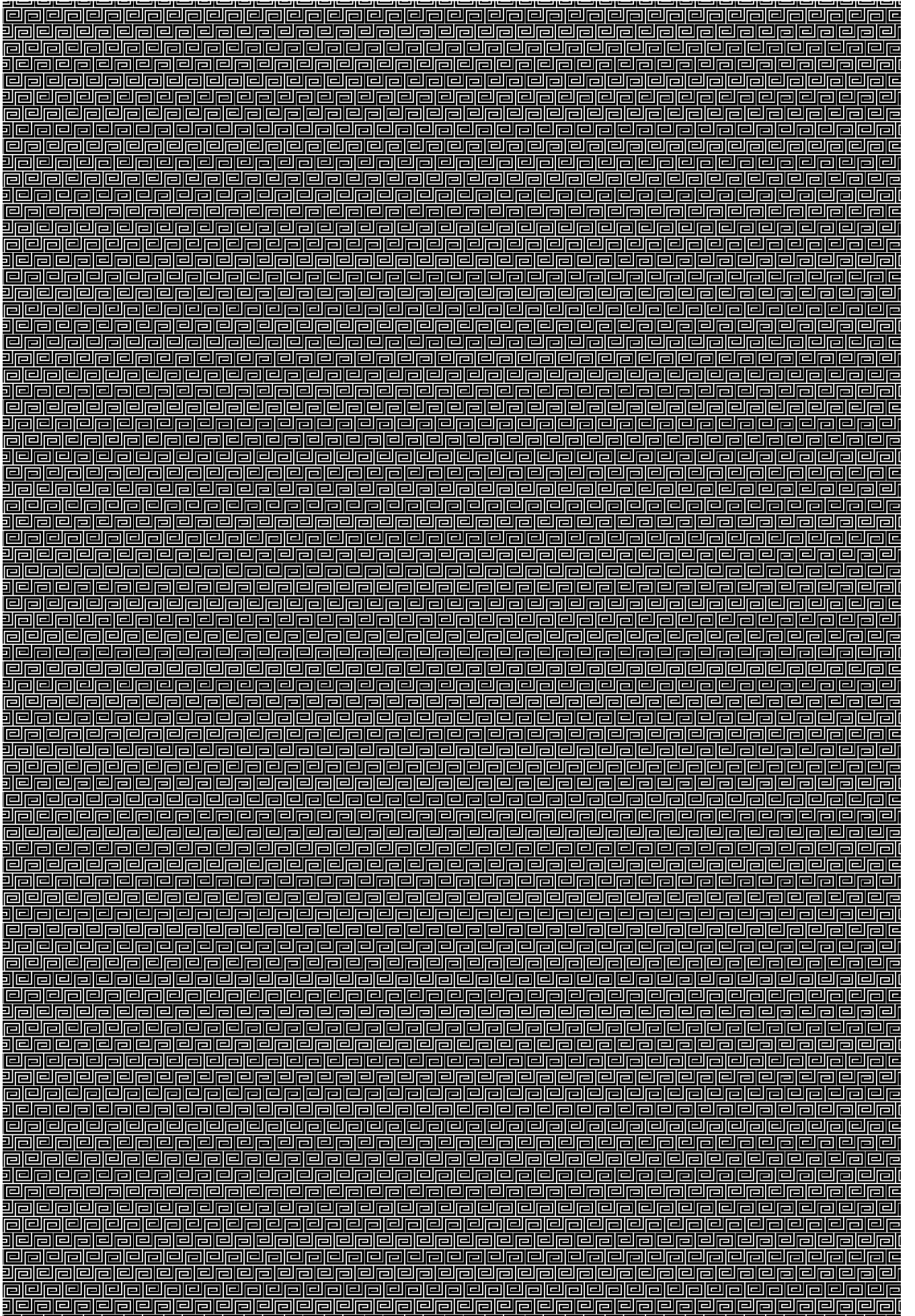
物理学専攻博士前期課程夏季入学試験問題

物理学 II (120 分)

2025 年 8 月 26 日 (火)  
12:30 ～ 14:30

**注意** 問題 (物理学 II [1], 物理学 II [2]) ごとに答案用紙各 1 枚を使用し, 解答は 1 題について 1 枚の答案用紙の表裏に収めよ. たとえ白紙であっても, 必ず 2 題分の答案用紙に受験番号と氏名を記入して提出すること. 答案用紙には受験科目 (物理学 II), 問題番号 ([1]/[2]) を記入すること.







## 大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学II」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．ただし， $h$  をプランク定数， $\hbar = h/(2\pi)$ ， $i^2 = -1$  とする．

問 1 以下の波動関数  $\varphi(x)$  で記述される 1 粒子の波束を考える．

$$\varphi(x) = \frac{1}{(\lambda^2 \pi)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(\frac{ip_c x}{\hbar} - \frac{x^2}{2\lambda^2}\right)$$

ここで， $x$  は 1 次元方向の空間座標を表す．また， $p_c$ ， $\lambda$  は実の定数であり， $\lambda > 0$  とする．

1-1) 波動関数  $\varphi(x)$  を以下のように平面波の重ね合わせで表したときの，係数  $\tilde{\varphi}(p)$  を求めよ．

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\varphi}(p) e^{ipx/\hbar}$$

ただし， $a, b \in \mathbb{R}$  かつ  $a > 0$  のとき，以下の等式が成り立つことを用いてよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-a(x-ib)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

1-2) 座標  $x$  の関数として表された物理量  $A(x)$  の期待値  $\langle A \rangle$  と揺らぎ  $\Delta A$  を以下で定義する．

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi^*(x) A(x) \varphi(x), \quad \Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}$$

ただし， $\varphi^*(x)$  は  $\varphi(x)$  の複素共役を表す．運動量  $p = -i\hbar \frac{d}{dx}$  について，期待値  $\langle p \rangle$ ， $\langle p^2 \rangle$ ，および揺らぎ  $\Delta p$  をそれぞれ求めよ．

問2 ハミルトニアン演算子  $\hat{H}$  が以下で与えられる2次元1粒子系を考える。

$$\hat{H} = \hat{h}_x + \hat{h}_y, \quad \hat{h}_\mu = \frac{1}{2m}\hat{p}_\mu^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}_\mu^2$$

ここで、 $\mu = x, y$  は2次元の空間方向を指定する添字であり、 $m$  は粒子の質量、 $\omega$  は調和振動子型ポテンシャルの固有角振動数を表す正の実数である。また、粒子の位置演算子  $\hat{q}_\mu$  と運動量演算子  $\hat{p}_\mu$  は以下の交換関係を満たすエルミート演算子である。

$$[\hat{q}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\hbar\delta_{\mu\nu}, \quad [\hat{q}_\mu, \hat{q}_\nu] = [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0$$

ここで、生成演算子  $\hat{a}_\mu^\dagger$  と消滅演算子  $\hat{a}_\mu$  を

$$\hat{a}_\mu = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{q}_\mu + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_\mu \right), \quad \hat{a}_\mu^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{q}_\mu - \frac{i}{m\omega}\hat{p}_\mu \right)$$

で定義すると、 $[\hat{a}_\mu, \hat{a}_\nu^\dagger] = \delta_{\mu\nu}$ ,  $[\hat{a}_\mu, \hat{a}_\nu] = [\hat{a}_\mu^\dagger, \hat{a}_\nu^\dagger] = 0$  が満たされる。 $\hat{q}_\mu$  の座標表示は  $q_\mu$ ,  $\hat{p}_\mu$  の座標表示は  $-i\hbar\frac{\partial}{\partial q_\mu}$  である。

2-1) 数演算子  $\hat{n}_\mu = \hat{a}_\mu^\dagger\hat{a}_\mu$  の固有値を  $n_\mu$  ( $n_\mu$  は0以上の整数) としたとき、 $\hat{n}_x$  と  $\hat{n}_y$  の同時固有状態  $|n_x, n_y\rangle$  が  $\hat{H}$  の固有状態であることを示せ。

この系の基底状態は  $|0, 0\rangle$  であり、第1励起状態は  $|1, 0\rangle = \hat{a}_x^\dagger|0, 0\rangle$ ,  $|0, 1\rangle = \hat{a}_y^\dagger|0, 0\rangle$  である。 $|1, 0\rangle$  と  $|0, 1\rangle$  を用いて  $|\alpha\rangle$  を  $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle - i|0, 1\rangle)$  と定義する。また、 $|0, 0\rangle$ ,  $|\alpha\rangle$  の座標表示を、それぞれ  $\psi_0(q_x, q_y)$ ,  $\psi_\alpha(q_x, q_y)$  とする。ここで、 $\psi_0(q_x, q_y)$  は以下で与えられる。

$$\psi_0(q_x, q_y) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(q_x^2 + q_y^2)\right)$$

2-2)  $\psi_\alpha(q_x, q_y)$  を求めよ。

2-3) 角運動量演算子  $\hat{\ell}$  を  $\hat{\ell} = \hat{q}_x\hat{p}_y - \hat{q}_y\hat{p}_x$  と定義する。 $|\alpha\rangle$  が  $\hat{\ell}$  の固有状態であることを示し、対応する固有値を求めよ。

2-4) 極座標  $r, \theta$  を  $q_x = r\cos\theta$ ,  $q_y = r\sin\theta$  によって導入する。ただし、 $r \geq 0$  および  $-\pi \leq \theta < \pi$  である。 $\psi_\alpha(q_x, q_y)$  の振幅の  $r$  依存性、および位相の  $\theta$  依存性の概形を図示せよ。

## 大学院博士前期課程夏季入学試験問題「物理学II」

[2] 以下の問いに答えよ。結果だけでなく、求め方や計算の過程も示すこと。ただし、 $k_B$  をボルツマン定数、絶対温度を  $T$ 、 $\beta = 1/(k_B T)$  とする。

問1 互いに独立な  $N$  個の量子力学的な3準位系  $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$  が温度  $T$  で熱平衡状態にあるものとする。ただし、状態  $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$  は規格化されており、互いに直交するものとする。各3準位系のハミルトニアン  $\hat{H}$  は  $\Delta > 0$  として以下で与えられる。

$$\hat{H} = -\Delta(|a\rangle\langle c| + |b\rangle\langle b| + |c\rangle\langle a|).$$

$\hat{H}$  の規格化された固有状態を  $|n\rangle (n = 1, 2, 3)$  として、その固有値  $E_n$  は  $E_1 = E_2 = -\Delta$ ,  $E_3 = \Delta$  となる。

1-1)  $E_n (n = 1, 2, 3)$  に対応する固有状態  $|n\rangle$  を、 $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$  を用いてそれぞれ表せ。

1-2)  $T = 0$ , および  $T = \infty$  におけるエントロピーをそれぞれ求めよ。

1-3) エネルギーの統計平均を求めよ。

1-4) 1つの3準位系内の量子力学的演算子  $\hat{A}$  の統計平均は、 $\frac{1}{Z_1} \sum_n \langle n | \hat{A} e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle$  と表される。

ただし、 $Z_1 = \sum_n \langle n | e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle$  である。演算子  $\hat{A} = |a\rangle\langle a|$  の統計平均を求めよ。

問2 一次元方向にのみ運動する独立な古典  $N$  粒子系を考える．各粒子 ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) の質量，位置座標，運動量をそれぞれ  $m, x_i, p_i$  とする．各粒子はポテンシャルエネルギー  $V(x_i) = cx_i^4$  のもとで運動しており，温度  $T$  で熱平衡状態にあるものとする．ただし， $c > 0$  とする．以下では古典統計力学を用い，ギブス因子は考えなくてよいものとする．

2-1) 分配関数は  $h$  をプランク定数として，

$$\frac{1}{h^N} \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dp_i \int_{-\infty}^{\infty} dx_i \exp(-S_i),$$

と書ける．ボルツマン因子  $\exp(-S_i)$  を  $p_i, x_i, \beta, m, c$  を用いて表しなさい．

2-2) 運動エネルギーの統計平均を求めよ．必要であれば， $\int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-t^2) = \sqrt{\pi}$  を用いてよい．

2-3) ポテンシャルエネルギーの統計平均を求めよ．

ただし，ガンマ関数  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$  の性質  $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$  を用いてよい．

2-4)  $x_i^2$  の統計平均  $\langle x_i^2 \rangle$  の温度依存性について考える．図1の(a)~(f)にはその  $T$  依存性の概形が太線で示されている．ポテンシャルエネルギー  $V(x_i) = cx_i^4$  のもとでの粒子の  $\langle x_i^2 \rangle$  の温度依存性として，最も適切なものを図1 (a)~(f)の中から一つ選び記号で答え，その理由を述べよ．ただし，図中の点線は， $V(x_i)$  が調和ポテンシャル  $V(x_i) \sim x_i^2$  の場合の統計平均  $\langle x_i^2 \rangle \propto T$  を表す．

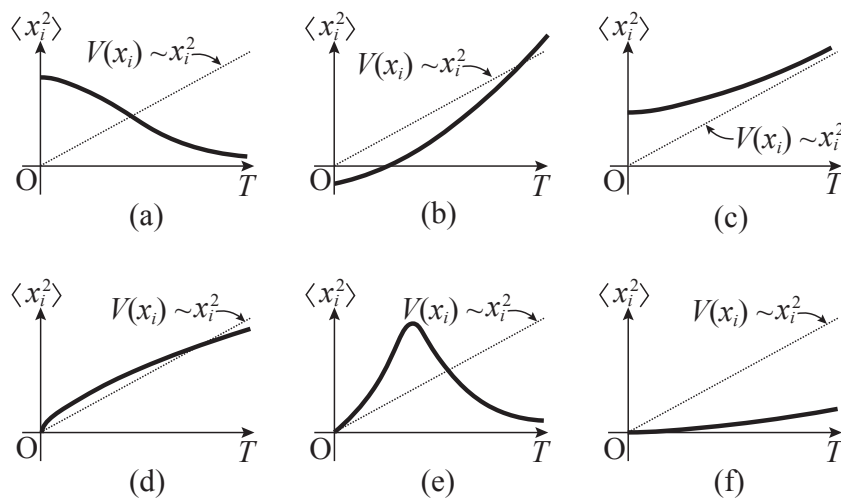


図1



