2026年度

東京都立大学 大学院理学研究科

物理学専攻博士前期課程冬季入学試験問題

物理学 II (60分)

2026年2月12日 (木)
11:00 〜 12:00

注意　問題 (物理学 II [1], 物理学 II [2]) ごとに答案用紙各1枚を使用し，解答は1題について1枚の答案用紙の表裏に収めなさい．たとえ白紙であっても，必ず2題分の答案用紙に受験番号と氏名を記入して提出すること．

大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 II」

[1] 以下の問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．ただし，h をプランク定数，$\hbar = h/(2\pi)$ とする．

問 1 以下のハミルトニアン H で記述される量子力学的な 1 粒子系を考える．

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \lambda x^4$$

ここで, x は座標を表す変数で, m, ω, λ は正の定数である．この系の基底状態を変分法で議論するため, 試行波動関数 $\psi_\alpha(x)$ を以下で定義する．

$$\psi_\alpha(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2/2}$$

ただし, α は正の実数である．以下の問いに答えよ．

1-1) 状態 $\psi_\alpha(x)$ でのエネルギー期待値 $E(\alpha)$ は, 以下のように書かれる．

$$E(\alpha) = K(\alpha) + \frac{m\omega^2}{4\alpha} + \frac{3\lambda}{4\alpha^2}$$

ここで, $K(\alpha)$ は運動エネルギーの寄与である．$K(\alpha) = \dfrac{\alpha\hbar^2}{4m}$ となることを示せ．ただし, c を正の実数として, 以下の積分公式が成り立つことを用いてよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-cx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$$

1-2) $E(\alpha)$ が最小となる α を $\alpha_{\min}$ とする．$\alpha_{\min}$ を λ の冪で 1 次まで展開し, $\alpha_{\min} = \alpha_0 + \alpha_1\lambda$ と書いたとき, α_0 と α_1 を求めよ．

1-3) $E(\alpha_{\min})$ を λ の 1 次まで求めよ．また, 得られた結果が, λ に対する 1 次摂動の結果と等しくなることを示せ．ただし, $\psi_{\alpha_0}(x)$ が $\lambda = 0$ の系の基底状態であることを用いてよい．

大学院博士前期課程冬季入学試験問題「物理学 II」

[2] 以下のスピン 1/2 の 3 次元自由フェルミ気体に関する問いに答えよ．結果だけでなく，求め方や計算の過程も示すこと．ただし，全粒子数を N，化学ポテンシャルを μ，気体の体積を V とする．また，k_{B} をボルツマン定数，プランク定数を h，$\hbar = h/(2\pi)$，絶対温度を T，$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ とする．

問 1　1 粒子の質量を m，状態密度を $D(\epsilon)$ とする．ただし，ϵ は 1 粒子のエネルギーである．グランドカノニカル分布における物理量 A の統計平均を $\langle A \rangle$ と表すものとする．

1-1) 状態密度 $D(\epsilon)$ を求めよ．

1-2) 感受率 χ を $\chi \equiv \left(\dfrac{\partial}{\partial \mu} \langle N \rangle \right)_{T,V}$ と定義する．$T = 0$ における χ を，$\epsilon = \mu$ における状態密度 $D(\mu)$ を用いて表せ．

1-3) 有限温度 T における感受率 χ を，$\langle N \rangle$ と $\langle N^2 \rangle$ を用いて表せ．

以下では熱力学的な考察をせよ．

問 2　ギブス・デュエムの関係式 $-SdT + VdP - Nd\mu = 0$ を用いて，

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial N} \right)_{T,V} = \frac{V}{N^2} \frac{1}{\kappa},$$

であることを示せ．ここで，圧縮率 κ は $\kappa = -\dfrac{1}{V} \left(\dfrac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,N}$ であり，S，P はそれぞれ気体のエントロピー，圧力である．P の N,V 依存性は，密度 $\dfrac{N}{V}$ を通して表されることに注意すること．